Band IV2. **Heft 1.**

QA
36
.E56
v.4B
pt.1

ENCYKLOPÄDIE

DER

MATHEMATISCHEN WISSENSCHAFTEN

MIT EINSCHLUSS IHRER ANWENDUNGEN.

HERAUSGEGEBEN IM AUFTRAGE
DER AKADEMIEEN DER WISSENSCHAFTEN ZU MÜNCHEN UND WIEN
UND DER GESELLSCHAFT DER WISSENSCHAFTEN ZU GÖTTINGEN,
SOWIE UNTER MITWIRKUNG ZAHLREICHER FACHGENOSSEN.

IN SIEBEN BÄNDEN.

BAND I: ARITHMETIK UND ALGEBRA, RED. VON W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— II: ANALYSIS, IN 2 TEILEN. . . . . H. BURKHARDT IN ZÜRICH.
— III: GEOMETRIE, IN 3 TEILEN. . . . . W. FR. MEYER IN KÖNIGSBERG.
— IV: MECHANIK, IN 2 TEILEN . . . . . F. KLEIN IN GÖTTINGEN.
— V: PHYSIK, IN 2 TEILEN. . . . . A. SOMMERFELD IN AACHEN.
— VI, 1: GEODASIE UND GEOPHYSIK . . . . E. WIECHERT IN GÖTTINGEN.
— VI, 2: ASTRONOMIE . . . . . R. LEHMANN-FILHÉS IN BERLIN.
— VII: HISTORISCHE, PHILOSOPHISCHE UND DIDAKTISCHE FRAGEN BEHANDELND, SOWIE GENERALREGISTER . . . . . (IN VORBEREITUNG).

BAND IV2. HEFT 1. AUSGEGEBEN AM 6. JUNI 1901.

LEIPZIG,
DRUCK UND VERLAG VON B. G. TEUBNER.
1901.

☞ Bisher erschien: Band I, Heft 1—6; Band II1, Heft 1—4; Band IV2, Heft 1.
☞ Unter der Presse befinden sich: Band I, Heft 7 (Schlufs); Band II1, Heft 5 und II2, Heft 1; Band IV1, Heft 1.
☞ Einbanddecken in Halbfranz werden auf Bestellung mit dem Schlufshefte eines jeden Bandes zu wohlfeilen Preisen von der Verlagsbuchhandlung geliefert.

Inhalt des vorliegenden Heftes.

		Seite
IV 14.	Geometrische Grundbegriffe. Von **M. Abraham** in Göttingen	3
IV 15.	Hydrodynamik: Physikalische Grundlegung. Von **A. E. H. Love** in Oxford. .	48
IV 16.	Hydrodynamik: Theoretische Ausführungen. Von **A. E. H. Love** in Oxford. .	85

Band IV: Mechanik, in 2 Teilen. Redigiert von F. Klein.

* Unter der Presse. † Erschienen.

I. Teil.

A. Einleitung.

*1. Die Prinzipien der rationellen Mechanik: **A. Voſs** in Würzburg.

B. Mechanik der Punkte und starren Systeme.

I. Behandlung elementarer Fragen in geometrischer Form.

2. Geometrische Grundlagen für die Statik und Kinematik des starren Körpers: **E. Timerding** in Strafsburg i. E.
3. Die Geometrie der Massen: **G. Jung** in Mailand.
4. Kinematik als selbständige Disciplin: **A. Schoenflies** in Königsberg.
5. Ausgewählte Kapitel der Statik, insbesondere der graphischen Statik: **L. Henneberg** in Darmstadt.
6. Die elementare Kinetik: **J. Petersen** in Kopenhagen und **P. Stäckel** in Kiel.

II. Anwendungen, mit Berücksichtigung der störenden Einflüsse.

7. Die Mechanik der einfachsten physikalischen Apparate und Versuchsanordnungen: **Ph. Furtwängler** in Potsdam.
8. Dynamische Probleme der Maschinentechnik: **K. Heun** in Berlin.
9. Ballistik: **C. Cranz** in Stuttgart.
10a. Spiel und Sport: **G. T. Walker** in Cambridge.
10b. Physiologische Mechanik: **O. Fischer** in Leipzig.

III. Behandlung beliebiger Systeme von endlichem Freiheitsgrad in analytischer Allgemeinheit.

11a. Entwickelung allgemeiner Methoden: **P. Stäckel** in Kiel.
11b. Specialdiscussion dynamischer Probleme: **P. Stäckel** in Kiel.
12. Die mathematische Behandlung des n-Körper-Problems: **E. T. Whittaker** in Cambridge.
13. Rotation starrer Körper und Verwandtes: **P. Stäckel** in Kiel.

II. Teil.

C. Mechanik der deformierbaren Körper.

I. Analytisch-geometrische Hülfsmittel.

†14. Geometrische Grundbegriffe: **M. Abraham** in Göttingen.

II. Hydrodynamik.

†15. Physikalische Grundlegung: **A. E. H. Love** in Oxford.
†16. Theoretische Ausführungen: **A. E. H. Love** in Oxford.
17. Hydraulik, erster Teil: Das Strömen von Wasser in Röhren und Kanälen etc.: **E. Paladini** in Mailand.
18. Hydraulik, zweiter Teil: Motoren und Pumpen: **M. Grübler** in Dresden.
19. Schiffsbewegung: **A. Kriloff** in St. Petersburg.
20. Aërodynamik: **S. Finsterwalder** in München.

III. Elastizitätslehre.

21. Physikalische Grundlegung: **A. Sommerfeld** in Aachen.
22. Theoretische Behandlung der statischen Probleme: **O. Tedone** in Genua.
23. Die Statik der Baukonstruktionen: **E. Ovazza** in Palermo.
24. Schwingungen, insbesondere Akustik: **H. Lamb** in Manchester.
25. Theorie der auf elastischer Wirkung beruhenden Mefsapparate: **Ph. Furtwängler** in Potsdam.

D. Mechanik der aus sehr zahlreichen diskreten Teilen bestehenden Systeme.

26. Das Eingreifen der Wahrscheinlichkeitsrechnung: **L. Boltzmann** in Leipzig.

Neuester Verlag von B. G. Teubner in Leipzig.

Ahrens, W., mathematische Unterhaltungen und Spiele. [X u. 428 S.] gr. 8. 1901. In Original-Leinwandband mit Zeichnung von P. Bürck in Darmstadt. n. *M.* 10.— (Auch in 2 Hälften broschiert.)

Brückner, Max, Vielecke und Vielflache. Theorie und Geschichte. Mit 7 lithographierten und 5 Lichtdruck-Doppeltafeln, sowie vielen Figuren im Text. [VIII u. 227 S.] gr. 4. 1900. geh. n. *M.* 16.—

Büttner, Friedrich, Studien über die Green'sche Abhandlung: Mathematical Investigations concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids (1832). A. u. d. T.: Preisschriften gekrönt und herausgegeben von der Fürstlich Jablonowski'schen Gesellschaft zu Leipzig. (XXXVI.) Nr. XIV der mathematisch-naturwissenschaftlichen Section. [V u. 98 S.] gr. 8. 1900. geh. n. *M.* 6.40.

[Fortsetzung siehe 3. Umschlagseite.

C. MECHANIK DER DEFORMIERBAREN KÖRPER.

Digitized by the Internet Archive
in 2026

https://archive.org/details/encyklopadiederm0004vari_b1y7

IV 14. GEOMETRISCHE GRUNDBEGRIFFE.

Von

M. ABRAHAM

in Göttingen.

Inhaltsübersicht.

1. Einleitende Übersicht über die geometrischen Grössen der Mechanik und Physik.

I. Vektoranalysis.

2. Polare Vektoren.
3. Axiale Vektoren.
4. Feld eines Skalars.
5. Feld eines Vektors.
6. Potentielles Feld.
7. Solenoïdales Feld.
8. *Laplace*'sches Feld.
9. Flächennormales Vektorfeld.
10. Zerlegung des Vektorfeldes in ein potentielles und ein solenoïdales Feld.
11. Ableitung neuer Vektoren und Skalaren aus gegebenen Vektoren.

II. Kinematik und Statik der Kontinua.

12. Homogene Deformation.
13. Lineare Vektorfunktion.
14. Zerlegung in reine Deformation und Rotation.
15. Andere Zerlegungen.
16. Unendlich kleine, insbesondere heterogene Deformation.
17. Formänderung bei homogener Deformation; Tensoren.
18. Unendlich kleine heterogene Formänderung; Tensorfelder.
19. Spannungen in einem Körper.
20. Einführung krummliniger Koordinaten in Vektor- und Tensorfelder.

III. Wechselwirkungen der Felder von Skalaren, Vektoren und Tensoren.

21. Symmetrie physikalischer Erscheinungen und Krystallsymmetrie.
22. Wechselwirkungen von Vektorfeldern.
23. Wechselwirkungen, bei denen Tensoren eine Rolle spielen.

Litteratur.

Lehrbücher.

W. Thomson and *P. G. Tait*, Treatise on natural philosophy. Part I. 1. Aufl. Oxford 1867, deutsch v. *H. Helmholtz* u. *Wertheim*. Braunschweig 1874. 2. Aufl. Cambridge 1879.

J. Cl. Maxwell, Treatise on electricity and magnetism. London 1873, deutsch v. *B. Weinstein*. Berlin 1883.

W. K. Clifford, Elements of dynamic. Part I. London 1878.

Th. Liebisch, Physikalische Krystallographie. Leipzig 1891.

A. E. H. Love, A treatise on the mathematical theory of elasticity. Vol. I. Cambridge 1892.

O. Heaviside, Electromagnetic theory. Vol. I. London 1894.

A. Föppl, Einführung in die Maxwell'sche Theorie der Elektrizität, Leipzig 1894.

W. Voigt, Compendium der theoretischen Physik. 2 Bde. Leipzig 1895 u. 96.

W. Voigt, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Leipzig 1898.

V. Bjerknes, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte. Bd. I. Leipzig 1900.

P. Appell, Traité de mécanique rationelle. Tome III. Paris 1900.

B. Riemann-H. Weber, Partielle Differentialgleichungen. 4. Aufl. Braunschweig 1900. Bd. 1.

W. Voigt, Elementare Mechanik. 2. Aufl. Leipzig 1900.

Monographieen.

J. W. Gibbs, Elements of vector analysis (not published). New-Haven 1881—84.

Élie, La fonction vectorielle et ses applications à la physique, Bord. mém. (4) 3 (1893), p. 1—137.

G. Ferraris, Teoria geometrica dei campi vettoriali. Memorie di Torino (2) 47 (1897), p. 259. Als erstes Kapitel in die „Lezioni di elettrotecnica". Tor. 1899 aufgenommen.

A Föppl, Die Geometrie der Wirbelfelder. Leipzig 1897.

W. Voigt, L'élasticité des cristaux. Rapport Paris 1900, deutsch Gött. Nachr. 1900. Heft 2.

W. Voigt, Über die Parameter der Krystallphysik und über gerichtete Grössen höherer Ordnung. Gött. Nachr. 1900, Heft 4, p. 355—379.

---

1. Einleitende Übersicht über die geometrischen Grössen der Mechanik und Physik. Von den in der Mechanik und Physik auftretenden Grössen sind einige, wie Masse, Energie von der Beschaffenheit, dass die Angabe ihrer Masszahl und ihrer Dimension[1]) zu ihrer eindeutigen Bestimmung hinreicht. Solche Grössen nennt man neuerdings *Skalare*[2]); die Masszahl des Skalars giebt an, wie oft ein als

---

1) *J. B. Fourier*, Théorie analytique de la chaleur, Paris 1822, deutsch v. *B. Weinstein*. Berlin 1884, art. 160—162.

2) *W. R. Hamilton*, Lectures on quaternions, Cambr. 1853, art. 64.

Einheit gewählter Skalar derselben Art in ihm enthalten ist, die Dimension, wie sich diese Einheit bei einer Änderung der Grundeinheiten für Masse, Länge und Zeit transformiert. (Über Dimensionen und absolutes Masssystem vgl. V 1.)

Neben diesen algebraischen Grössen spielen indessen auch *geometrische Grössen* eine Rolle, d. h. solche Grössen, die eine bestimmte Orientierung im Raume besitzen. In der Mechanik starrer Körper kamen bereits (s. IV 2) die *Vektoren* zur Verwendung. Neben diesen sind für die Mechanik der Kontinua die *Tensoren* (s. Nr. **17** dieses Art.) von besonderer Wichtigkeit.

Die Orientierung dieser gerichteten Grössen gegen das Koordinatensystem pflegt man durch Angabe ihrer *„Komponenten"* festzulegen; die Komponenten ändern bei einer Transformation des Koordinatensystems ihre Werte. *Das Verhalten der Komponenten gegenüber der Gruppe aller Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems charakterisiert vollständig die geometrische Natur der betreffenden Grösse*[3]). Ist der geometrische Charakter der Grösse bekannt, so erübrigt zu ihrer vollständigen Bestimmung noch die Angabe ihrer Dimension, und ihrer, auf ein festes Koordinatensystem bezogenen Komponenten.

Dabei besteht ein wesentlicher Unterschied zwischen den geometrischen Grössen, die in der Mechanik *starrer* Körper, und denjenigen, die in der Mechanik *deformierbarer Körper* und in der mathematischen Physik zur Verwendung gelangen. Die Bewegung aller Punkte eines starren Körpers ist durch Angabe von 6 Grössen, den Komponenten einer „Schraubung" (Art. IV 2) vollständig bestimmt. In der Mechanik der Kontinua und in der Physik hingegen können die Werte der Grössen, welche den mechanischen und physikalischen Zustand des Körpers bestimmen, in den einzelnen Punkten bis zu einem gewissen Grade unabhängig von einander vorgeschrieben werden. Es sind die *„Felder"* der gerichteten Grössen, deren Theorie hier von Wichtigkeit wird. Man nennt[4]) ein Gebiet „Feld" einer Zustandsgrösse, wenn jedem Punkte des Gebietes ein beliebiger, im all-

3) Die Klassifikation der geometrischen Grössen der Mechanik und Physik auf Grund dieses Prinzips scheint in der Litteratur nicht vollständig durchgeführt worden zu sein, ist aber z. B. von Herrn *F. Klein* in seinen Vorlesungen wiederholt vorgetragen worden. In einer während der Korrektur erscheinenden Arbeit von *W. Voigt*, Gött. Nachr. 1900, Heft 4, p. 355—379 (vgl. das Verzeichnis der Monographien) kommt das Prinzip gleichfalls zur Verwendung.

4) *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 1 (1851), p. 179 = Reprint of papers on electrostatics and magnetism n. 605, p. 467.

gemeinen stetig mit dem Orte veränderlicher Wert der Zustandsgrösse zugeordnet ist. Die Werte der Zustandsgrösse an verschiedenen Punkten ihres Feldes stehen im allgemeinen in keinem gesetzmässigen, durch Gleichungen zwischen den Komponenten auszudrückenden Zusammenhange.

Dieser Artikel, welcher den geometrischen Grundbegriffen der Mechanik der Kontinua und der mathematischen Physik gewidmet ist, beschränkt sich auf die Behandlung derjenigen gerichteten Grössen, welche zur Charakterisierung der in der Mechanik und Physik auftretenden Felder verwandt worden sind. Demgemäss wird hier bei der Klassifikation der gerichteten Grössen von Translationen des Koordinatensystems abgesehen und ausschliesslich die Gruppe derjenigen Transformationen des rechtwinkligen Koordinatensystems berücksichtigt, welche den Anfangspunkt fest lassen; dieselbe entsteht, wenn man die *Gruppe der Drehungen* durch Heranziehung der *Inversionen* (d. h. Umkehrung aller Axenrichtungen) erweitert. Durch das Verhalten der Komponenten einer Zustandsgrösse diesen Operationen gegenüber ist bestimmt, in welche Klasse gerichteter Grössen sie einzuordnen ist. Die Einordnung der Zustandsgrössen der Mechanik und Physik in die verschiedenen Klassen gerichteter Grössen ist von prinzipieller Bedeutung; denn nur zwischen Grössen, die derselben Klasse angehören, kann Gleichheit bestehen. Auch kommt die geometrische Natur der physikalischen Grössen in der Krystallphysik zur Geltung, wo sie in Beziehung zur Symmetrie der Krystallstruktur tritt (s. Nr. **21** dieses Art.).

I. Vektoranalysis.

2. Polare Vektoren. Ein Vektor[5]) ist (s. IV 2) nach Grösse, Richtung und Sinn bestimmt durch eine Strecke, welche von einem Punkte P zu einem Punkte Q führt; seine Komponenten entsprechen den Projektionen der Strecke auf die Koordinatenaxen. Demgemäss transformieren sich die Komponenten eines Vektors A auf wechselnde rechtwinklige Koordinatensysteme durch folgende orthogonale Substitution

$$(1)\qquad \begin{aligned} A_{x'} &= \alpha_1 A_x + \beta_1 A_y + \gamma_1 A_z, \\ A_{y'} &= \alpha_2 A_x + \beta_2 A_y + \gamma_2 A_z, \\ A_{z'} &= \alpha_3 A_x + \beta_3 A_y + \gamma_3 A_z, \end{aligned}$$

deren 9 Koeffizienten die Cosinus der Winkel angeben, welche die Axen

5) *W. R. Hamilton*, Lectures on quaternions art. 17.

des neuen Koordinatensystems $(x'y'z')$ mit denen des alten (xyz) einschliessen. Der Ausdruck

$$A_x^2 + A_y^2 + A_z^2 \tag{1'}$$

ist gleich dem Quadrate der Länge[5']) des Vektors A; er ist ein Skalar, d. h. er bleibt invariant bei Transformationen des Koordinatensystems. Ebenso ist folgende Verbindung von Komponenten zweier Vektoren A, B eine skalare Grösse

$$A_xB_x + A_yB_y + A_zB_z. \tag{2}$$

Geometrisch stellt (2) das Produkt der Längen der beiden Vektoren und des Cosinus des von ihren Richtungen eingeschlossenen Winkels dar. *H. Grassmann*[7]) nennt die Grösse (2) das *„innere Produkt"* der beiden „Strecken", und schreibt symbolisch $[A\,|\,B]$, *W. R. Hamilton*[9]) bezeichnet es als den negativen skalaren Teil $-SAB$ des Quaternionenproduktes der beiden Vektoren, *J. W. Gibbs*[11]) schreibt $A \cdot B$, *O. Heaviside*[12]) AB.

Sind A_x, A_y, A_z Komponenten eines Vektors, und ist der Ausdruck (2) ein Skalar, so sind auch B_x, B_y, B_z Vektorkomponenten[6]). Aus der Invarianz von (2) folgt zunächst, dass für die Grössen B_x, B_y, B_z folgende Transformationen gelten

$$\begin{aligned} B_x &= \alpha_1 B_{x'} + \alpha_2 B_{y'} + \alpha_3 B_{z'}, \\ B_y &= \beta_1 B_{x'} + \beta_2 B_{y'} + \beta_3 B_{z'}, \\ B_z &= \gamma_1 B_{x'} + \gamma_2 B_{y'} + \gamma_3 B_{z'}. \end{aligned}$$

Die Koeffizienten der Substitution, welche die alten Werte der Grössen (B_x, B_y, B_z) durch die neuen $(B_{x'}, B_{y'}, B_{z'})$ ausdrückt, gehen also aus den Koeffizienten der für die Transformation von Vektorkomponenten von den alten auf die neuen Axen geltenden Gleichungen (1) durch Vertauschung der Horizontal- und Vertikalreihen hervor; in der Sprache der Invariantentheorie drückt man diese Beziehung aus, indem man sagt: die Grössen B_x, B_y, B_z sind zu den Grössen A_x, A_y, A_z *kontragredient*. Zwei Grössensysteme, die zu demselben dritten kontragredient sind, sind offenbar zu einander *kogredient*, d. h. sie transformieren sich in derselben Weise auf wechselnde Koordinatensysteme. Infolge der Invarianz der Ausdrücke (1') und (2) sind die Grössen A_x, A_y, A_z; B_x, B_y, B_z beide kontragredient zu A_x, A_y, A_z, folglich sind sie zu einander kogredient; die Grössen B_x, B_y, B_z sind also ihrerseits Vektorkomponenten.

5') Die Länge der Strecke, die den Vektor A repräsentiert, wird in der Quaternionentheorie „Tensor" des Vektors A genannt.

6) Vgl. *H. Burkhardt*, Math. Ann. 43 (1893), p. 197.

Die Existenz eines Vektors A bedingt in der Regel das Vorhandensein eines Energiequantums E, dessen Zunahme dE der bei einer Steigerung dA_x, dA_y, dA_z der Vektorkomponenten aufzuwendenden Arbeitsleistung gleich ist. Da die Arbeit stets ein Skalar ist, so folgt aus

$$dE = \frac{\partial E}{\partial A_x} \cdot dA_x + \frac{\partial E}{\partial A_y} \cdot dA_y + \frac{\partial E}{\partial A_z} \cdot dA_z,$$

wie soeben bewiesen, dass $\frac{\partial E}{\partial A_x}$, $\frac{\partial E}{\partial A_y}$, $\frac{\partial E}{\partial A_z}$ ebenfalls Komponenten eines Vektors sind.

Vektorkomponenten von der bisher untersuchten Art wechseln nach (1) bei einer Inversion das Vorzeichen. Wollen wir diese Eigenschaft besonders hervorheben, so bezeichnen wir sie weiterhin als Komponenten eines *polaren Vektors.*

3. Axiale Vektoren[17]) traten schon in IV 2 auf, nämlich als Kräftepaare, die an einem starren Körper angreifen. Ihre Komponenten transformieren sich bei Drehungen und Inversionen des Koordinatensystems wie folgende Verbindungen von Komponenten zweier polarer Vektoren A, B:

$$(3) \quad P_x = A_y B_z - A_z B_y, \quad P_y = A_z B_x - A_x B_z, \quad P_z = A_x B_y - A_y B_x.$$

Die Komponenten P_x, P_y, P_z stellen die Projektionen des von den Strecken A, B gebildeten Parallelogramms auf die Koordinatenebenen dar; sie bestimmen jenes Parallelogramm nach Flächeninhalt, Stellung seiner Ebene, und Umlaufssinn. *H. Grassmann* nennt dasselbe *„äusseres Produkt“*[7]) der beiden Strecken A, B und schreibt symbolisch $[AB]$, *W. R. Hamilton*[9]) bezeichnet es als vektoriellen Teil $\mathrm{V}AB$

---

7) *H. Grassmann*, Die lineale Ausdehnungslehre, Leipz. 1844, und Die Ausdehnungslehre von 1862, Berlin = Ges. Werke, herausg. von *F. Engel*, Bd. I bezw. II, 1, Leipz. 1894. Vgl. Art. IV 2.

8) *H. Grassmann*, Ausdehnungslehre von 1844, p. 114. Ges. Werke 1, p. 189 nennt ein an seine Ebene gebundenes Parallelogramm *„Plangrösse“*. Für das frei im Raume verschiebbare hat er keinen besonderen Namen.

9) *W. R. Hamilton*, Phil. Mag. (3) 25 (1843), p. 490. Grössere Werke sind: Lectures on quaternions, Cambr. 1853; Elements of quaternions, 1. ed. London 1866; (deutsch v. *P. Glan*, Leipz. 1881/84), 2. ed. 1, 1899. S. auch *P. G. Tait*, An elementary treatise on quaternions, Cambr. 1. ed. 1867, 2. ed. 1874, 3. ed. 1890. Die Quaternionentheorie stellt den Vektor A dar durch $A_x \cdot i + A_y \cdot j + A_z \cdot k$; $i\ j\ k$ sind Einheitsvektoren, welche in Richtung der Koordinatenaxen weisen, und den Multiplikationsregeln unterworfen sind $i \cdot i = j \cdot j = k \cdot k = -1$; $ij = -ji = k$, $jk = -kj = i$, $ki = -ik = j$ (s. III B 3). Daher ist das Produkt zweier Vektoren eine Quaternion, d. h. ein Aggregat aus einem Skalar und einem Vektor. Der skalare Teil ist mit dem negativen inneren Produkte, der vektorielle mit

des Quaternionenproduktes der beiden Vektoren, *B. de Saint-Venant*[10]) nennt es „geometrisches Produkt", *J. W. Gibbs*[11]) schreibt $A \times B$, *O. Heaviside*[12]) $\bigvee A\,B$, letzterer Autor nennt es „vektorielles Produkt" oder *„Vektorprodukt"*.

Die axialen Vektoren, deren Repräsentant das äussere Produkt zweier Strecken ist, *verhalten sich bei Drehungen des Koordinatensystems wie polare Vektoren, sie unterscheiden sich von jenen dadurch, dass ihre Komponenten bei einer Inversion der Koordinatenrichtungen das Vorzeichen beibehalten, während polare Vektorkomponenten es wechseln.* So lange man von Inversionen des Koordinatensystems absieht, kann man ein Parallelogramm[8]) durch eine auf seiner Ebene senkrechte Strecke ersetzen, deren Länge dem Flächeninhalt des Parallelogramms gleich ist; dieses ist *Grassmann*'s „Ergänzung"[7]) des Parallelogramms. Während aber das Parallelogramm selbst bei einer Spiegelung in Bezug auf seine Ebene ungeändert bleibt, kehrt die Ergänzung ihre Richtung um.

In der Quaternionentheorie und der auf dieser fussenden Entwicklung der Vektoranalysis wurde diesem Unterschiede keine Rechnung getragen. Erst *A. N. Whitehead*[13]) trennt bei der Darstellung der Vektorenrechnung wieder die gerichteten Strecken systematisch von den mit einem Umlaufssinn versehenen Parallelogrammen. Inzwischen war von Seiten der Physiker die Wichtigkeit dieses Gegensatzes erkannt worden. Hier war es *J. Cl. Maxwell*[14]), der zuerst die beiden Arten von Richtungsgrössen als „translatorische" und „rotatorische" Vektoren unterschied, mit Rücksicht darauf, dass unendlich kleine

---

der „Ergänzung" des äusseren Produktes in *Grassmann*'s Terminologie identisch; s. *H. Grassmann*, Math. Ann. 12 (1877), p. 378.

10) *B. de Saint-Venant*, Par. C. R. 21 (1845), p. 620 scheint unabhängig von *Grassmann* und *Hamilton* zu diesem Begriffe gelangt zu sein.

11) *J. W. Gibbs*, Vector Analysis, New-Haven 1881/84.

12) *O. Heaviside*, Electrical papers London 1892, passim. Electromagnetic theory, 1, chap. 3, London 1894. An *Heaviside* schliessen sich *A. Föppl* und *G. Ferraris* an (s. d. Verz. der Lehrbücher und Monographieen). Die Systeme von *Gibbs* und *Heaviside*, welche, den Umweg über das Quaternionenprodukt vermeidend, die Grundbegriffe der Vektorenrechnung geometrisch definieren, sind von ihren Autoren wiederholt in den Spalten der „Nature" gegen die Angriffe der orthodoxen Quaternionisten (*P. G. Tait* und *A. Mc Aulay*) verteidigt worden; vgl. Nature 43, p. 511, 608; 44 (1891), p. 79; 47, p. 151, 225, 463, 533; 48 (1893), p. 364.

13) *A. N. Whitehead*, A Treatise on universal algebra, Cambr. 1898, book VII, chap. 4, p. 548 ff.

14) Treatise 1, art. 15; Papers 2, p. 257.

Rotationen der zweiten Art angehören (s. Nr. **16** dieses Art.). *P. Curie*[15]) und *E. Wiechert*[16]) wiesen neuerdings ebenfalls auf die Notwendigkeit hin, diese Grössenklassen auseinanderzuhalten, letzterer Forscher nennt sie „Vektoren" und „Rotoren", während *W. Voigt*[17]) sie als *„polare"* und *„axiale" Vektoren* bezeichnet; die letztgenannte Bezeichnung ist die hier gebrauchte. Man hat gefunden, dass die elektrische Kraft der Klasse der polaren, die magnetische der Klasse der axialen Vektoren angehört (s. Nr. **22** dieses Art.).

Sind P, Q zwei axiale Vektoren, so sind die Ausdrücke

$$(4)\quad P_x^2 + P_y^2 + P_z^2, \qquad (4')\quad Q_x^2 + Q_y^2 + Q_z^2,$$

$$(5)\quad P_x Q_x + P_y Q_y + P_z Q_z$$

Skalare, d. h. sie sind invariant bei Drehungen und Inversionen des Koordinatensystems. *Sind andrerseits* P_x, P_y, P_z *Komponenten eines axialen Vektors, und ist der Ausdruck* (5) *ein Skalar, so sind* Q_x, Q_y, Q_z *ebenfalls Komponenten eines axialen Vektors.* Der Beweis dieses Satzes entspricht ganz dem des analogen für polare Vektoren geltenden (s. Nr. **2** dieses Art.). Ebenso folgt, dass aus einem von P abhängigen Skalar E ein neuer axialer Vektor abgeleitet werden kann mit den Komponenten:

$$\frac{\partial E}{\partial P_x}, \quad \frac{\partial E}{\partial P_y}, \quad \frac{\partial E}{\partial P_z}.$$

4. Feld eines Skalars. Ist ein Skalar φ als stetige Funktion des Ortes (fonction de point)[18]) gegeben, so ist seine Abnahme auf dem Wegelement $d\lambda$:

$$-d\varphi = -\frac{\partial \varphi}{\partial x} \cdot dx - \frac{\partial \varphi}{\partial y} \cdot dy - \frac{\partial \varphi}{\partial z} \cdot dz,$$

wenn $dx\,dy\,dz$ die Projektionen von $d\lambda$ auf die Koordinatenaxen bezeichnen. Da $d\lambda$ als Vektor, $dx\,dy\,dz$ als seine Komponenten anzusehen sind, so folgt nach Nr. **2** dies. Art., dass $-\frac{\partial \varphi}{\partial x}, -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, -\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ Komponenten eines Vektors sind. Die Richtung dieses Vektors ist die der grössten räumlichen Abnahme des Skalars φ, seine Länge $\sqrt{\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2}$ giebt den auf die Längeneinheit bezogenen

15) *P. Curie*, J. de phys. (3) 3 (1894), p. 393.

16) *E. Wiechert*, Königsb. Phys. ökon. Ges. 37 (1896), p. 6; Ann. Phys. Chem. 59 (1896), p. 287.

17) *W. Voigt*, Compendium 2, p. 418 u. p. 801, 1896. Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle. Leipz. 1898, p. 18.

18) *G. Lamé*, J. éc. polyt. cah. 23 (1834), p. 215; Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859, chap. 1.

Betrag dieser grössten Abnahme an. Letzteren Ausdruck nannte *G. Lamé*[18]) *„Differentialparameter erster Ordnung“*. *Lamé* erfasste indessen nicht den Vektor als gerichtete Grösse. Dieses blieb *W. R. Hamilton* vorbehalten, der ihn mit Hülfe des symbolischen Operators

$$\nabla = i\frac{\partial}{\partial x} + j\frac{\partial}{\partial y} + k\frac{\partial}{\partial z}$$

darstellte[19]). Man bezeichnet den Vektor $-\nabla\varphi$ als *Gefälle* (slope[20]) oder *Gradienten*[20']) des Skalars φ. Durch Berechnung des Gefälles wird jedem Skalarfeld ein Vektorfeld zugeordnet. Das Feld eines Vektors, der als Gefälle eines Skalars angesehen werden kann, wird „potentielles Vektorfeld“ genannt; weitere Ausführungen über Skalarfelder werden unten an die Behandlung des potentiellen Vektorfeldes (Nr. 6) angeknüpft.

5. Feld eines Vektors. Ändert sich ein Vektor in einem gewissen Bereiche im allgemeinen — d. h. abgesehen von einer endlichen Zahl von Flächen, Kurven und Punkten — stetig mit dem Orte, so nennt man den Bereich das *Feld* des Vektors[4]). Wir verstehen im Folgenden unter einem Vektorfelde schlechtweg das Feld eines polaren Vektors. Für axiale Vektoren gelten entsprechende Entwickelungen.

Maxwell unterscheidet *Kraftvektoren* und *Strömungsvektoren*[21]). Diese Unterscheidung ist keine wesentliche, man kann vielmehr denselben Vektor A bald als Kraftvektor, bald als Strömungsvektor deuten. Deutet man ihn als Strömungsgeschwindigkeit einer den Raum erfüllenden Flüssigkeit, so erhält man eine *skalare Grösse*, indem man die gesamte *Flüssigkeitsmenge* berechnet, welche in der Zeiteinheit ein festes Flächenstück f in dem durch die Normale n angezeigten Sinne durchfliesst. Dieselbe ist gleich dem *Flächenintegral*

$$F = \int\int df(A_x \cos nx + A_y \cos ny + A_z \cos nz). \tag{6}$$

Deutet man ihn hingegen als Kraftvektor, so erhält man eine *skalare Grösse*, wenn man die *Arbeit* berechnet, welche die Kraft bei einer Verschiebung längs des festen Kurvenstückes λ leistet. Dieselbe ist gleich dem *Linienintegral*

$$L = \int d\lambda(A_x \cos \lambda x + A_y \cos \lambda y + A_z \cos \lambda z). \tag{7}$$

19) *W. R. Hamilton*, Lectures, art. 620. Den Operator ∇ nennt man gelegentlich „Nabla“ nach einem hebräischen Musikinstrumente von ähnlicher Form.

20) *O. Heaviside*, Electromagnetic theory 1, p. 186.

20') *Riemann-Weber*, Partielle Differentialgleichungen 1 (1900), p. 213.

21) *Maxwell*, Treatise 1, art. 12; Papers 2, p. 257 ff.

Man kann andrerseits auch aus einem Kraftvektor einen Skalar F, aus einem Strömungsvektor einen Skalar L ableiten. Ersteren nennt man „*Kraftfluss* durch die Fläche f", letzteren in der Hydrodynamik „*Circulation* längs der Kurve λ".

Ist die Fläche f geschlossen und n ihre äussere Normale, so ergiebt eine unter dem Namen „*Gauss'scher Satz*" bekannte Integraltransformation [22])

$$F = \iiint d\tau \left(\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \right). \tag{8}$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist über den von von der Fläche f begrenzten Raum τ zu erstrecken. *Der Ausdruck*

$$\operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} \tag{9}$$

ist ein Skalar. Er stellt in der hydrodynamischen Analogie die auf die Volumeinheit berechnete *Ergiebigkeit der Flüssigkeitsquellen dar. J. Cl. Maxwell* nennt [23]) [23a]) den mit dem negativen Vorzeichen versehenen Ausdruck (9) „*Konvergenz*", während der jetzt für (9) gebräuchliche Name „*Divergenz*" von *W. K. Clifford* [24]) herrührt. In der Symbolik der Quaternionentheorie [25]) wird er $-S\nabla A$ geschrieben. *J. W. Gibbs* und *O. Heaviside* [26]) schreiben $\nabla \cdot A$ bezw. ∇A.

Verläuft im Felde eine Unstetigkeitsfläche σ, deren Normalen mit ν_1, ν_2 bezeichnet werden mögen, so ist *die Ergiebigkeit der Quellen pro Flächeneinheit* gleich dem *Sprunge der Normalkomponente des Feldvektors*

$$A_{\nu_1} + A_{\nu_2}. \tag{9'}$$

Dieser Sprung wird daher als „*Flächendivergenz*" [27]) des Vektors A bezeichnet.

22) s. II A 2, Nr. **46**. Der Satz wurde von *Gauss* in seinen „Allgemeinen Lehrsätzen", Leipz. 1840, für potentielle Felder bewiesen. Ges. Werke 5, p. 224.

23) Treatise 1, art. 25.

23a) *Maxwell*, Classification of physical quantities. Papers 2, p. 257 ff. Lond. math. soc. Proc. 3 (1871), p. 224.

24) *W. K. Clifford*, Elements of dynamic, p. 209.

25) *P. G. Tait* wandte zuerst den Operator ∇ auf Vektoren an, s. Edinb. Proc. 4 (1862) = Papers 1, Cambr. 1898, p. 37. Der Skalarteil der so entstehenden Quaternion ergiebt die Konvergenz, der Vektorteil den curl des betr. Vektors.

26) *Gibbs* und *Heaviside* (s. Anm. 11, 12) bilden das innere, bez. äussere Produkt aus dem Operator ∇ und dem Vektor A und erhalten so div. und curl. Das entgegengesetzte Vorzeichen des Symbols für die Divergenz bei den Quaternionisten entspricht den verschiedenen Vorzeichen des inneren Produktes und des Skalarteils des Quaternionenproduktes, s. Anm. 9.

27) *V. Bjerknes*, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte 1, Leipzig 1900, p. 9—18.

Bildet man das Linienintegral (7) für eine geschlossene Kurve λ, so erhält man nach dem *„Stokes'schen Satze“* [28])

$$(10)\quad L = \iint d\omega \left[\left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} \right) \cos(\omega, yz) + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} \right) \cos(\omega, zx) + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} \right) \cos(\omega, xy) \right].$$

Das Integral auf der rechten Seite dieser Gleichung ist über eine von der Kurve λ umrandete Fläche ω zu erstrecken; (ω, yz), (ω, zx), (ω, xy) geben die Winkel an, welche das betreffende Element der Fläche ω mit den Koordinatenebenen einschliesst. Die bei der Umwandlung des Linienintegrals L in ein Flächenintegral auftretenden Ausdrücke

$$(11)\qquad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}, \quad \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}$$

sind *Komponenten eines axialen Vektors* [29])[13]). Diesen nennt *Maxwell* [23]) *„rotation“*, später [23a]) *„curl“* des Vektors A; er, wie auch *Heaviside* [26]), der gleichfalls den Namen „curl“ gebraucht, schreibt in der Symbolik der Quaternionentheorie [25]) $V \nabla A$, *J. W. Gibbs* [26]) schreibt $\nabla \times A$, *E. Wiechert* [29]) Quirl A, *H. A. Lorentz* [30]) *Rot.* A, *W. Voigt* [68]) vort. A. In der Kinematik der Kontinua (Nr. **16** d. Art.) spielt der halbe curl des Verschiebungsvektors eine Rolle, indem er die Rotation der Volumelemente angiebt. Bei einer den Raum erfüllenden Flüssigkeitsströmung giebt der halbe curl des Geschwindigkeitsvektors die auf die Volumeinheit berechnete *Intensität* der *Wirbel* an.

Verläuft im Felde der Flüssigkeitsströmung eine Unstetigkeitsfläche σ, längs der die Flüssigkeitsschichten an einander vorbei gleiten, so bildet die Fläche σ den Sitz eines *„Flächenwirbels“* [27]), dessen auf die Flächeneinheit bezogene Intensität durch den halben *„Flächencurl“* gemessen wird. *Der Flächencurl ist ein axialer Vektor, dessen Ebene senkrecht zur Unstetigkeitsfläche orientiert ist.* Seine Komponente nach irgend einer, auf der Unstetigkeitsfläche senkrechten Ebene ist gleich dem Sprunge der in die betreffende Ebene fallenden tangentiellen Komponente des Feldvektors. Ist N_{12} ein von der ersten nach der zweiten Seite der Unstetigkeitsfläche σ weisender

28) *G. G. Stokes*, A Smith's prize paper, Cambr. 1854; *H. Hankel*, Preisschrift, Göttingen 1861; s. auch II A 2, Nr. **46**.

29) *E. Wiechert*, Königsb. Phys. ökon. Ges. 37 (1896), p. 8; Ann. Phys. Chem. 59 (1896), p. 288; Grundlagen der Elektrodynamik, Festschrift 1899.

30) *H. A. Lorentz*, Versuch einer Theorie der elektrischen und optischen Erscheinungen in bewegten Körpern, Leiden 1895.

Einheitsvektor, so ist *der Flächencurl des Vektors A mit dem äusseren Produkte* (Nr. **3** dieses Artikels)

(11′) $$[N_{12}\,(A_2 - A_1)]$$

identisch.

6. Potentielles Feld. Ist das Linienintegral (7), erstreckt über eine die Punkte α, β verbindende Kurve, bei beliebiger Wahl des Punktes β vom Wege unabhängig, so lässt sich das Vektorfeld auf ein Skalarfeld zurückführen. Wird der Wert des Skalars φ im Punkte α beliebig gewählt, so sei der Wert im Punkte β

$$(12) \qquad \varphi_\beta = \varphi_\alpha - \int_\alpha^\beta d\lambda\,(A_x \cos\lambda x + A_y \cos\lambda y + A_z \cos\lambda z);$$

der so bestimmte Skalar φ heisst das (skalare) *Potential* (vgl. den Artikel über Potentialtheorie II A 7 b); ein Vektorfeld, das ein skalares Potential besitzt, wird *„potentielles Vektorfeld“* genannt. Der Feldvektor $A = -\nabla\varphi$ giebt das Gefälle (s. Nr. 4 dies. Art.) des Potentials an. *W. Thomson* gebraucht die Bezeichnung *„lamellares Feld“* [31]), mit Rücksicht darauf, dass man ein potentielles Feld durch ein Netz von Äquipotentialflächen (Niveauflächen) in dünne Lamellen teilen kann, derart, dass beim Durchqueren einer jeden Lamelle das Potential um den gleichen Betrag abnimmt. Diese Lamellen sind überall senkrecht zur Richtung des Feldvektors orientiert; bringt man ein Kurvenelement von bestimmter Länge an verschiedene Stellen des Feldes, so bildet die Zahl der Lamellen, welche es schneidet, ein relatives Mass für die Komponente des Feldvektors in Richtung des Elementes, an der betreffenden Stelle des Feldes.

Die *Divergenz des potentiellen Vektors A* ist

$$(13) \quad \operatorname{div} A = \frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} + \frac{\partial A_z}{\partial z} = -\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) = -\nabla^2\varphi.$$

Der Skalar $\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right)$ wird von *G. Lamé* [18]) als *„Differentialparameter 2. Ordnung* (Δ_2)“ bezeichnet; *Maxwell* nennt ihn [23]) [23a]) *„concentration“* des Skalars φ. In der Symbolik der Quaternionentheorie [19]) [25]) wird er $-\nabla^2\varphi$, von *Thomson-Tait, Gibbs* und *Heaviside* [20]) $\nabla^2\varphi$ geschrieben, auch andere Zeichen sind für ihn im Gebrauch (s. II A 7 b, Nr. 2).

---

31) *W. Thomson*, On solenoïdal and lamellar distributions of magnetism. London Roy. Soc. Proc. 1850 — Reprint of papers on electrostatics and magnetism, art. 504 ff.

Der curl des Feldvektors verschwindet in potentiellen Feldern; denn hier verschwindet vermöge Gl. (12) das Linienintegral L für jede geschlossene Kurve λ, und mithin die linke Seite von Gl. (10) für jede Fläche ω. Umgekehrt folgt aus dem Verschwinden des curl nach (10) die Unabhängigkeit des Linienintegrales L vom Wege, mithin die Existenz eines skalaren Potentials φ. Daher bezeichnet man das potentielle Feld auch als *„wirbelfreies Feld"*. Verlaufen *Unstetigkeitsflächen* im Felde, so ist es dann und nur dann ein potentielles, wenn nicht nur im ganzen Felde der räumliche curl (11), sondern auch, auf der Unstetigkeitsfläche, der Flächencurl (11′) verschwindet, d. h. wenn die tangentiellen Komponenten des Feldvektors stetig die Fläche durchsetzen. Sind *Unstetigkeitslinien* vorhanden, so ist das Potential im allgemeinen nicht mehr einwertig, es hängt vielmehr davon ab, wie oft der Integrationsweg $(\alpha\,\beta)$ in Gl. (12) die Unstetigkeitslinien umschlingt. Das Analoge findet in mehrfach zusammenhängenden Feldern statt (s. II A 7 b, Nr. 9).

Für die Optik, Elektrodynamik, Akustik und Elastizitätslehre besitzen diejenigen *Vektorfelder* besonderes Interesse, welche ebenen, homogenen Wellenzügen entsprechen. Dieselben besitzen die Eigenschaft, dass man eine Schar paralleler Ebenen konstruieren kann derart, dass in allen Punkten einer jeden dieser Ebenen der Feldvektor dieselbe Grösse und Richtung hat. Sind die ebenen homogenen Wellen longitudinal, wie in der Akustik, d. h. ist der Feldvektor senkrecht zu den Wellenebenen orientiert, so verschwindet der curl des Feldvektors. Wendet man nämlich den *Stokes*'schen Satz (10) auf ein Rechteck an, das man parallel oder senkrecht zu den Wellenebenen stellt, so verschwindet stets das über die Begrenzung erstreckte Linienintegral L; daher verschwinden die drei Komponenten des curl an allen Punkten des Feldes, d. h. *das Feld longitudinaler ebener homogener Wellen ist ein potentielles* [32]).

7. Solenoïdales Feld. Ist das Flächenintegral F (6), welches die Strömung durch eine Fläche f hindurch angiebt, für alle im Felde verlaufenden geschlossenen Flächen gleich Null, *so verschwindet* nach (8) im ganzen Felde *die Divergenz des Feldvektors*. Derartige Felder werden *„quellenfreie"* oder *„solenoïdale"* [31]) genannt. Letztere Bezeichnung ist darauf zurückzuführen, dass man ein quellenfreies Feld in ein System von dünnen Röhren oder Solenoïden teilen kann, derart,

32) Wohl zuerst von *M. O'Brien*, Cambr. Trans. 8 (1847), p. 508, der eine eigene Symbolik verwendet; s. auch *M. Abraham*, Math. Ann. 52 (1899), p. 88; *P. Duhem*, J. de math. (5) 6 (1900), p. 249.

dass die Strömung durch die einzelne Röhre für alle *Querschnitte* derselben die gleiche ist. Die Röhrenwände werden von Stromlinien gebildet. Man konstruiert sie zweckmässig so, dass für alle Röhren der Betrag der Strömung der gleiche ist. Bringt man alsdann ein Flächenelement von bestimmtem Flächeninhalt an verschiedene Punkte des Feldes, so giebt die Zahl der Röhren, welche das Element durchsetzen, ein relatives Maass für die Komponente des Feldvektors senkrecht zum Elemente an der betreffenden Stelle des Feldes.

Verlaufen Unstetigkeitsflächen im Felde, so ist es dann und nur dann ein solenoïdales, wenn nicht nur im ganzen Felde die räumliche Divergenz (9), sondern auch an der Unstetigkeitsfläche die Flächendivergenz (9′) verschwindet, d. h. wenn die Normalkomponente des Feldvektors die Unstetigkeitsfläche stetig durchsetzt.

In solenoïdalen Feldern kann man die Komponenten des divergenzlosen Feldvektors A auf folgende Form bringen:

$$(14)\quad A_x = \frac{\partial \Phi_z}{\partial y} - \frac{\partial \Phi_y}{\partial z}, \quad A_y = \frac{\partial \Phi_x}{\partial z} - \frac{\partial \Phi_z}{\partial x}, \quad A_z = \frac{\partial \Phi_y}{\partial x} - \frac{\partial \Phi_x}{\partial y}.$$

Φ_x, Φ_y, Φ_z sind als Komponenten eines axialen Vektors Φ anzusehen; unterwirft man sie der Bedingung

$$(14')\qquad \frac{\partial \Phi_x}{\partial x} + \frac{\partial \Phi_y}{\partial y} + \frac{\partial \Phi_z}{\partial z} = 0,$$

so wird Φ „*Vektorpotential*“ [33]) genannt.

Mit dem curl des Feldvektors hängt das Vektorpotential durch die Gleichungen zusammen:

$$(14'')\quad \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z} = -\nabla^2 \Phi_x, \quad \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x} = -\nabla^2 \Phi_y,$$
$$\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y} = -\nabla^2 \Phi_z.$$

Ein solenoïdales Feld, dessen Wirbel im Endlichen liegen, besitzt stets ein Vektorpotential [34]). Über seine Berechnung bei gegebenen Wirbeln vgl. Nr. **10** dieses Artikels.

Ist das *Feld ein ebenes*, d. h. entspricht es einer ebenen Flüssigkeitsströmung, die etwa in der (xy)-Ebene stattfinden möge, so lautet die für *quellenfreie* Strömung charakteristische Bedingung:

$$\frac{\partial A_x}{\partial x} + \frac{\partial A_y}{\partial y} = 0.$$

Ist dieselbe erfüllt, und das ebene Feld somit solenoïdal, so ist die

33) *Maxwell*, Treatise 2, art. 404, 405 u. 617.

34) Siehe etwa *P. Duhem*, J. de math. (5) 6 (1900), p. 215.

gesamte Strömung durch eine Kurve, die zwei Punkte (α, β) des Feldes verbindet, vom Wege (α, β) unabhängig, und somit dem Zuwachs $\psi_\beta - \psi_\alpha$ einer Funktion $\psi(x, y)$ des Ortes gleich zu setzen[35]), die *„Stromfunktion"* genannt wird. Mit ihr sind die Komponenten des Feldvektors durch die Gleichungen verknüpft

$$A_x = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad A_y = -\frac{\partial \psi}{\partial x}. \tag{15}$$

Die Stromfunktion kann gedeutet werden als z-Komponente des Vektorpotentiales; die anderen beiden Komponenten des letzteren verschwinden in ebenen Feldern. Auch die Theorie der Strömung inkompressibler Flüssigkeiten auf gekrümmten Flächen wird durch Einführung einer Stromfunktion vereinfacht.

In analoger Weise werden *solenoïdale axial-symmetrische Felder* behandelt[36]). Legt man durch die Symmetrieaxe des Feldes eine Ebene, und verbindet zwei Punkte (α, β) derselben durch eine Kurve λ, so ist die gesamte Strömung durch die Fläche, welche durch Rotation der Kurve λ um die Symmetrieaxe entsteht, vom Wege λ unabhängig, und somit dem Zuwachs $2\pi(\psi_\beta - \psi_\alpha)$ einer Funktion $2\pi\psi$ gleichzusetzen, die nur vom Orte in jener Ebene, also etwa dem Abstand ϱ von der Axe, und dem Abstand z des auf die Axe gefällten Lotes vom Anfangspunkte abhängt. Die Komponenten des Feldvektors parallel bezw. senkrecht zur Symmetriaxe sind

$$A_z = -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial \varrho}, \quad A_\varrho = \frac{1}{\varrho}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{15'}$$

In dem Felde homogener ebener transversaler Wellen verschwindet die Divergenz des Feldvektors. Dieses ergiebt sich durch Anwendung des *Gauss*'schen Satzes (8) auf ein rechtwinkliges Parallelepiped, von dem ein Paar gegenüberliegender Seiten in Wellenebenen fällt. *Das Feld ebener homogener transversaler Wellen* — z. B. der elektromagnetischen — *ist daher ein solenoïdales*[32]).

8. **Laplace'sches Feld.** Ein Vektorfeld, welches zugleich potentiell und solenoïdal ist, besitzt ein skalares Potential, welches der *Laplace*'schen Gleichung $\nabla^2 \varphi = 0$ genügt; es wird daher *„Laplace*'sches Feld" genannt[36']). Seine Theorie ist in dem Art. über Potentialtheorie II A 7b behandelt worden.

35) *Lagrange*, Oeuvres 4, p. 720; *W. J. M. Rankine*, Lond. Phil. Trans. 1871, p. 275.

36) *G. G. Stokes*, Cambr. Trans. 7 (1842) = Papers 1, p. 14; *W. J. M. Rankine*, Phil. Trans. 1871, p. 278.

36') *Maxwell*, Treatise I, art. 95 b.

Ein *ebenes Laplace'sches Feld* besitzt ferner eine Stromfunktion ψ, die mit dem Potential φ nach (15) durch die Gleichungen verknüpft ist

$$(16) \qquad -\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \frac{\partial \psi}{\partial x}.$$

Diese Gleichungen sind die notwendigen und hinreichenden Bedingungen dafür, dass $(-\varphi + \psi i)$ eine Funktion des komplexen Argumentes $(x + yi)$ ist (s. II B 1). Durch Einführung dieser Funktion und Verwendung der in der Theorie der Funktionen einer komplexen Variabeln gebräuchlichen Methoden erfährt die Theorie ebener *Laplace*scher Felder eine erhebliche Vereinfachung.

9. Flächennormales Vektorfeld. Ein Vektor A ist an allen Punkten des Feldes senkrecht zu einer Flächenschar $f =$ constans orientiert, wenn er, der Richtung nach, mit dem Gefälle $-\nabla f$ übereinstimmt, und nur der Intensität nach durch einen Faktor g, der eine Funktion des Ortes ist, von dem Gefälle möglicherweise abweicht. Ein flächennormaler Vektor steht mithin zu zwei Skalaren f, g in der Beziehung $A = -g\nabla f$. Damit ein Vektor A einer derartigen Gleichung genüge, muss es möglich sein, das Differential

$$A_x dx + A_y dy + A_z dz$$

mit Hülfe eines integrierenden Divisors g zu einem vollständigen Differential zu machen. Die Bedingung hierfür

$$(17) \quad A_x\left(\frac{\partial A_y}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial y}\right) + A_y\left(\frac{\partial A_z}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial z}\right) + A_z\left(\frac{\partial A_x}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial x}\right) = 0$$

besagt geometrisch, dass *der Vektor A an allen Punkten seines Feldes der Ebene seines curl parallel ist*[37]).

W. Thomson nennt flächennormale Vektorfelder *„komplex-lamellar“* [31]). Wie *A. Clebsch* gezeigt hat, lässt sich *jedes Vektorfeld* in der Form $A = -\nabla\varphi - g\nabla f$ darstellen[38]), also als *Superposition eines potentiellen und eines flächennormalen Vektorfeldes* auffassen.

10. Zerlegung des Vektorfeldes in ein potentielles und ein solenoïdales Feld. Ein unbegrenztes Vektorfeld, dessen Komponenten im Unendlichen mindestens von der 2^{ten} Ordnung unendlich klein werden, kann stets als Superposition eines potentiellen und eines solenoïdalen Feldes angesehen werden. Ist A der Feldvektor, so

37) *A. Sommerfeld*, Deutsche Math.-V. 6 (1897), p. 124; s. auch *P. Appell*, Traité de mécanique rationelle 3, 1900, p. 15.

38) *A. Clebsch*, J. f. Math. 56 (1859), p. 1.

setzt man $A = A' + A''$, div $A' = 0$, curl $A'' = 0$ und ordnet durch die Gleichungen

$$A' = \text{curl } \Phi', \text{ div } \Phi' = 0; \quad A'' = -\nabla\varphi''$$

dem solenoïdalen Teile ein Vektorpotential, dem potentiellen ein skalares Potential zu. Letztere haben nach (13), (14″) den Gleichungen zu genügen

$$\nabla^2\varphi'' = -\text{div } A; \quad -\nabla^2\Phi_x' = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z},$$

$$-\nabla^2\Phi_y' = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x},$$

$$-\nabla^2\Phi_z' = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y};$$

aus denen die Werte von φ'', Φ_x', Φ_y', Φ_z' in einem beliebigen Punkte (xyz) der Feldes nach den Regeln der Potentialtheorie zu berechnen sind. Stellt r die Entfernung vom Raumelement $d\tau_1$ dar, so hat man

$$\varphi'' = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d\tau_1}{r}(\text{div } A)_1,$$

$$\Phi' = \frac{1}{4\pi}\iiint \frac{d\tau_1}{r}(\text{curl } A)_1. \tag{18}$$

Die 2te Gleichung ist eine Vektorgleichung, sie ersetzt die drei Gleichungen für die Komponenten von Φ', die man erhält, wenn man den curl in seine Komponenten zerlegt. *Hierdurch ist die Zerlegung in den potentiellen und den solenoïdalen Teil vollendet, und gleichzeitig das Vektorfeld durch die Werte seiner Divergenz und seines curl eindeutig bestimmt*[39]). Auf den Fall, dass *Unstetigkeitsflächen* im Felde verlaufen, ist das Resultat leicht zu übertragen, indem man entsprechende Flächenintegrale hinzufügt, welche von der Flächendivergenz (9′) und dem Flächencurl (11′) abhängen[39′]).

Begrenzte Felder kann man auf unendlich viele verschiedene Arten in ein quellenfreies und ein wirbelfreies Feld zerlegen[40]). Man kann etwa das skalare Potential so bestimmen, dass der potentielle Teil des Feldes nicht nur im Innern die verlangten Werte der Divergenz, sondern auch an der Begrenzung die dem Gesamtfeld vorgeschriebenen Werte der Normalkomponente annimmt; dann ist das Vektorpotential zugleich bestimmt. Oder man ergänzt das begrenzte Vektorfeld in stetiger Weise, indem man ausserhalb der Grenzfläche

39) *G. G. Stokes*, Cambr. Trans. 9 (1850), p. 1 = Papers 2, p. 255 ff.

39′) *L. Donati*, Bol. Mem. (5) 7 (1897), p. 1—26.

40) *A. Clebsch*, J. f. Math. 61 (1863), p. 195; *E. Betti*, Nuovo Cim. (2) 7 (1872), p. 75; *H. Helmholtz*, J. f. Math. 55 (1858), p. 25 ff.

Quellen und Wirbel derart anbringt, dass das innere Feld ungeändert bleibt, und bildet die entsprechenden Werte des skalaren und des Vektorpotentials mit Hülfe der Gl. (18).

11. Ableitung neuer Vektoren und Skalaren aus gegebenen Vektoren. Aus gegebenen Vektoren $A, B, C, \ldots$ kann man in mannigfacher Weise neue Vektoren ableiten, deren Komponenten ganze rationale Funktionen der Komponenten der gegebenen Vektoren und ihrer Differentialquotienten nach den Koordinaten sind. *H. Burkhardt* hat untersucht[6]), welches die allgemeinste Form der so zu erhaltenden Vektoren und Skalaren ist, indem er die formalen Hülfsmittel verwandte, die in der Invariantentheorie der Algebraiker ihre Ausbildung gefunden haben. Er führt alle abgeleiteten Vektoren auf fünf Typen zurück, die durch folgende Operationen entstehen:

a) Geometrische Addition von Vektoren.

b) Bildung des äusseren (vektoriellen) Produktes aus je zwei der gegebenen Vektoren $A, B, C, \cdots$, $[AB]$ u. s. w.

c) Anwendung der Operationen curl, ∇ div, ∇^2 auf die gegebenen Vektoren.

d) Kombination der gegebenen Vektorkomponenten zu einem neuen Vektor, dessen Komponenten von der Form sind

$$A_x \frac{\partial B_x}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_x}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_x}{\partial z},$$
$$A_x \frac{\partial B_y}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_y}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_y}{\partial z},$$
$$A_x \frac{\partial B_z}{\partial x} + A_y \frac{\partial B_z}{\partial y} + A_z \frac{\partial B_z}{\partial z}.$$

Heaviside schreibt[12]) diesen Vektor $(A\nabla)B$. Ist A ein Einheitsvektor, so giebt $(A\nabla)B$ den auf die Längeneinheit berechneten Zuwachs an, den der Vektor B erfährt, wenn man in der durch A angezeigten Richtung fortschreitet.

e) Multiplikation der gegebenen und der neuen Vektoren mit drei Skalaren, nämlich dem inneren Produkte zweier Vektoren, dem Quadrate der Länge und der Divergenz eines Vektors.

Bei der Reduktion auf eine dieser Formen sind insbesondere folgende Rechnungsregeln von Nutzen[11]) [12]):

$$\text{div}\, g\nabla f = \frac{\partial g}{\partial x}\cdot\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y}\cdot\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial g}{\partial z}\cdot\frac{\partial f}{\partial z} + g\nabla^2 f, \tag{19}$$

$$\text{div}\,[AB] = B\,\text{curl}\,A - A\,\text{curl}\,B, \tag{19'}$$

$$\text{curl curl}\,A = \nabla\ \text{div}\,A - \nabla^2 A. \tag{20}$$

Integriert man die Gl. (19), (19′) über einen Raum τ, und formt die linken Seiten mit Hülfe des *Gauss*'schen Satzes (8) in Flächenintegrale um, so führt die erste zu dem *Green'schen Satze*[41]), die zweite zu einer ganz analogen Umwandlung eines Raumintegrals in ein Oberflächenintegral.

H. Burkhardt zieht nur Drehungen des Koordinatensystems in Betracht, und unterscheidet demgemäss nicht zwischen polaren und axialen Vektoren. Man kann indessen seine Resultate durch folgende Regel ergänzen: Sind die bei Drehungen des Koordinatensystems sich wie Vektorkomponenten transformierenden Ausdrücke Produkte von n Vektorkomponenten, so sind sie *Komponenten eines polaren Vektors, wenn n ungerade, eines axialen, wenn n gerade ist;* Differentiation nach einer Koordinate ist äquivalent der Multiplikation mit der Komponente eines Vektors in Richtung der betreffenden Koordinate. Demgemäss ist z. B. der *curl eines axialen Vektors ein polarer Vektor*[29]).

Wie es zweierlei Arten von Vektoren giebt, die sich durch ihr Verhalten bei Umkehrung der drei Koordinatenaxen unterscheiden, so giebt es auch *zwei Arten skalarer Grössen. Die einen behalten ihr Vorzeichen bei, wenn man von einem rechten Koordinatensystem zu einem linken übergeht, die anderen wechseln es.* Zu ersteren gehört das innere Produkt zweier polarer Vektoren, die Divergenz eines polaren Vektors, zu letzteren die aus den Komponenten von 3 polaren Vektoren A, B, C gebildete Determinante

$$\begin{vmatrix} A_x & A_y & A_z \\ B_x & B_y & B_z \\ C_x & C_y & C_z \end{vmatrix},$$

deren absoluter Betrag den Rauminhalt des durch jene drei Vektoren bestimmten Parallelepipeds angiebt. *Zu den Skalaren der zweiten Art gehört ferner die Divergenz eines axialen Vektors.* Die Unterscheidung zweier Arten skalarer Grössen ist in der Mechanik und Physik bisher nicht üblich gewesen und wird daher hier nur beiläufig erwähnt.

II. Kinematik und Statik der Kontinua.

12. Homogene Deformation. Die Deformation eines Körpers, der stetig den Raum erfüllt, sieht man in der Elastizitätstheorie als bestimmt an, wenn man die Lage aller Punkte des Körpers vor und

41) *G. Green*, Essay on the application of mathematical analysis to the theories of electricity and magnetism, Nottingham 1828 = Papers, p. 23 (s. II A 2, Nr. 47).

nach der Deformation kennt; sie ist analytisch darzustellen durch Gleichungen, welche jedem Wertsystem $(x\,y\,z)$ der Koordinaten vor der Deformation eineindeutig ein Wertsystem $(\xi\,\eta\,\zeta)$ der Koordinaten nach der Deformation zuordnen. Der einfachste Fall ist der, dass diese Gleichungen linear sind[42])

$$(21)\qquad \begin{aligned} \xi &= a_1 + (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \eta &= a_2 + a_{21}x + (1 + a_{22})y + a_{23}z, \\ \zeta &= a_3 + a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z. \end{aligned}$$

Eine derartige *Transformation* des Raumes nennen die Geometer nach *A. F. Möbius* eine *affine*[42']; *W. Thomson* und *P. G. Tait*[43]) bezeichnen die entsprechende Deformation als *homogene Deformation.* Strecken, die anfänglich parallel und gleich waren, bleiben auch nach der homogenen Deformation parallel und gleich. Ebenen bleiben Ebenen, wie überhaupt der Grad einer Fläche durch eine homogene Deformation nicht geändert wird; Punkte, die anfänglich auf einer Kugel lagen, liegen nachher auf einem Ellipsoide, dem sogenannten *Deformationsellipsoide*[44]). Ein Tripel senkrechter Halbmesser der Kugel wird zu einem Tripel konjugierter Halbmesser des Ellipsoids. *Es giebt im allgemeinen nur ein Tripel von Halbmessern, die sowohl vor wie auch nach der Deformation auf einander senkrecht stehen, nämlich die Hauptaxen des Deformationsellipsoids.*

13. Lineare Vektorfunktion. Man kann die affine Transformation (21) zusammensetzen aus einer Translation des Körpers mit den Komponenten a_1, a_2, a_3, welche den Punkt $x = y = z = 0$ in seine endgültige Lage bringt, und einer homogenen linearen Transformation, welche diesen Punkt unverschoben lässt. Wir fassen weiterhin nur letztere ins Auge, schreiben also

$$(22)\qquad \begin{aligned} \xi &= (1 + a_{11})x + a_{12}y + a_{13}z, \\ \eta &= a_{21}x + (1 + a_{22})y + a_{23}z, \\ \zeta &= a_{31}x + a_{32}y + (1 + a_{33})z. \end{aligned}$$

Ordnet man jedem Punkte des Körpers einen Vektor r zu, der seinen Abstand vom Anfangspunkte vor der Deformation nach Grösse und Richtung darstellt, so statuieren die Gl. (22) lineare Beziehungen

42) *A. Cauchy,* Sur la condensation et la dilatation des corps solides. Exercices de mathématiques 2, 1827, p. 60—69.

42') *A. F. Möbius*, Der baryzentrische Calcul, Leipz. 1827, p. 144 ff.

43) *W. Thomson* und *P. G. Tait,* Natural philosophy 1, art. 155.

44) *A. Cauchy*, Exercices de mathématiques 1828, 3, p. 237—244.

zwischen den Komponenten $(x\,y\,z)$ dieses Vektors und den Komponenten $(\xi\,\eta\,\zeta)$ des Vektors ϱ, in den (r) durch die Deformation übergeführt wird. Man bezeichnet zuweilen schlechtweg ϱ als „lineare Funktion" des Vektors r.[45]) Die Theorie der *„linearen Vektorfunktionen"* ist mit Hülfe symbolischer Methoden von *P. G. Tait*[45]) und namentlich von *J. W. Gibbs*[46]) entwickelt worden. Man stellt die lineare Vektorfunktion symbolisch dar durch $\varrho = \varphi r$, wobei φ einen von neun Koeffizienten abhängigen, *„linearen Operator"* bezeichnet. Man kann etwa φ schreiben:

$$\begin{aligned} \varphi &= i\alpha + j\beta + k\gamma, \\ \alpha &= (1 + a_{11})i + a_{12}j + a_{13}k, \\ \beta &= a_{21}i + (1 + a_{22})j + a_{23}k, \\ \gamma &= a_{31}i + a_{32}j + (1 + a_{33})k. \end{aligned}$$

Ein Aggregat symbolischer Produkte, von der Art, wie φ, nennt *J. W. Gibbs* eine *„dyadic"*[46]); gebraucht man sie, wie in der Gleichung $\varrho = \varphi r$, als „prefactor", so hat man die Vektoren α, β, γ, welche an zweiter Stelle stehen, mit r nach den Gesetzen der inneren Produktbildung zu vereinigen, um zu den Gl. (22) zu gelangen. Gebraucht man sie dagegen als „postfactor", d. h. bildet man den Vektor $\varrho' = r\varphi$, so hat man r mit den an erster Stelle stehenden Vektoren der „dyadic" zu vereinigen. Es ist daher $\varrho' = \varphi' r$, wo $\varphi' = \alpha i + \beta j + \gamma k$ der *„zu φ konjugierte Operator"* ist. Wir gehen auf die symbolische Behandlungsweise der linearen Vektorfunktionen nicht näher ein, weil die meisten der hier in Betracht kommenden kinematischen Beziehungen zuerst mit Hülfe der Koordinatenmethoden abgeleitet worden sind.

14. Zerlegung in reine Deformation und Rotation. Man kann die Frage aufwerfen, welche Richtungen durch die homogene Deformation (22) nicht geändert werden. Diese Richtungen bestimmen sich aus einer Gleichung dritten Grades[47]), letztere hat entweder eine reelle Wurzel, oder deren drei; der erste Fall tritt beispielsweise ein, wenn die Deformation in eine Rotation ausartet; im zweiten Fall giebt es drei im allgemeinen schiefwinklige Richtungen im Körper, die durch die Deformation nicht geändert werden. *Stehen die drei Richtungen, die durch die Deformation nicht geändert werden, auf einander senkrecht,*

45) *P. G. Tait*, An elementary treatise on quaternions, Cambr. 1. ed. 1867, 2. ed. 1874, 3. ed. 1890; *W. K. Clifford*, Elements of dynamic, 1, p. 162.

46) *J. W. Gibbs*, Vector Analysis, New-Haven 1881/84, chap. III.

47) *Thomson-Tait*, Nat. phil. 1, art. 181.

so heisst die Deformation eine reine[48]). Bei einer reinen Deformation ändern demnach die Hauptaxen des Deformationsellipsoids ihre Lage im Raume nicht. Dafür, dass die Deformation (21) eine reine ist, reichen hin und sind notwendig die Bedingungen: $a_{21} = a_{12}$, $a_{32} = a_{23}$, $a_{13} = a_{31}$.[48]) Lineare Vektorfunktionen, die dieser Bedingung genügen, nennt man[45])[46]) *selbstkonjugiert* oder *symmetrisch.*

Man kann eine beliebige homogene Deformation stets hervorgebracht denken, indem man zuerst durch eine Rotation des Körpers als eines starren die Hauptaxen des Deformationsellipsoids in die endgültige Lage überführt und dann durch eine reine Deformation, d. h. durch Dehnung der zu jenen Axen parallelen Geraden, *die verlangte Formänderung herstellt.* Führt man zuerst die reine Deformation, und dann die Rotation aus, so ist die Lage der Rotationsaxe im Raume eine andere[49]). Die beiden Operationen, deren Produkt die allgemeine homogene Deformation ist, verhalten sich insofern verschieden, als die Rotationen eine Gruppe bilden, die reinen Deformationen dagegen nicht; vielmehr geben zwei reine Deformationen, mit verschiedenen Hauptaxen, nach einander ausgeführt, im allgemeinen keine reine Deformation[48]).

15. Andere Zerlegungen. Ausser den angeführten Arten, die allgemeine homogene Deformation als Produkt einfacherer Transformationen darzustellen, giebt es noch eine Reihe anderer. Unter den speziellen Deformationen, die hierbei in Betracht kommen, spielt die einfache *Scherung* oder *Schiebung* (engl. shear, franz. glissement) eine Rolle. Bei einer Scherung bleiben die Punkte einer bestimmten Ebene in ihrer ursprünglichen Lage; alle anderen Punkte werden parallel einer in jener Ebene festen Geraden, in einem dem Abstande von der Ebene proportionalen Masse verschoben[50]).

Eine von *P. G. Tait*[49]) angegebene Darstellung der allgemeinen homogenen Deformation als Resultante zweier einfacherer Deformationen, nämlich einer reinen Deformation und einer Drehung des Körpers um einen rechten Winkel, die mit einer gleichförmigen Dehnung aller zur Drehaxe senkrechten Geraden verbunden ist, ist mit der Zerlegung der allgemeinen linearen Vektorfunktion in den symmetrischen und den antisymmetrischen Teil (vgl. Nr. **16** dieses Art.) identisch. Die Resultante der beiden Deformationen ist dabei in der

48) *Thomson-Tait,* Nat. phil. 1, art. 182—185.

49) *P. G. Tait,* Edinb. Proc. 1872 = Papers 1, p. 194—198, stellt die Zerlegung durch Quaternionen dar.

50) *Thomson-Tait*, Nat. phil. art. 170 ff.

Weise zu bilden, dass man die entsprechenden Verschiebungen zu ihrer geometrischen Summe vereinigt; diese giebt die resultierende Verschiebung an.

16. Unendlich kleine, insbesondere heterogene Deformation. Die Zusammensetzung verschiedener Deformationen gestaltet sich wesentlich einfacher, wenn die entsprechenden Verschiebungen ($\xi - x$, $\eta - y$, $\zeta - z$) der Punkte des Körpers so klein sind, dass die Quadrate und Produkte der Koeffizienten $a_{11}, \cdots, a_{33}$ der Gl. (22) neben diesen Koeffizienten selbst zu vernachlässigen sind. Führt man solche unendlich kleine Deformationen nach einander aus, so addieren sich die entsprechenden Koeffizienten, d. h. die Verschiebungen setzen sich zu ihrer geometrischen Summe zusammen. Mithin ergeben zwei unendlich kleine reine Deformationen, nach einander ausgeführt, wiederum eine unendlich kleine reine Deformation. *Die Zerlegung der unendlich kleinen homogenen Deformation in reine Deformation und Rotation* (Nr. **14**) *entspricht der Zerlegung der linearen Vektorfunktion in einen symmetrischen und einen antisymmetrischen Bestandteil; die reine Deformation hängt von den Koeffizienten* a_{11}, a_{22}, a_{33}, $\frac{a_{21}+a_{12}}{2}$, $\frac{a_{32}+a_{23}}{2}$, $\frac{a_{13}+a_{31}}{2}$ *des symmetrischen, die Rotation von den Koeffizienten* $\frac{1}{2}(a_{32}-a_{23})$, $\frac{1}{2}(a_{13}-a_{31})$, $\frac{1}{2}(a_{21}-a_{12})$ *des antisymmetrischen Teiles ab;* letztere stellen die Komponenten der Rotation dar, d. h. die unendlich kleinen Rotationen um die Koordinatenaxen, welche sich zu der resultierenden Drehung nach dem Gesetze des Parallelepipeds vereinigen.

Die Theorie der *heterogenen Deformationen* lässt sich auf die der homogenen zurückführen. Es lassen sich nämlich die stetigen Funktionen des Ortes, welche die Verschiebungskomponenten (u, v, w) darstellen, in der Umgebung jedes Punktes (x_0, y_0, z_0) in eine *Taylor*'sche Reihe entwickeln[42]). Nimmt man den Bereich so klein an, dass die Reihe mit dem linearen Gliede abgebrochen werden kann, also die Gleichungen gelten:

$$
\begin{aligned}
u &= \xi - x = u_0 + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 (z - z_0), \\
v &= \eta - y = v_0 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)_0 (z - z_0), \\
w &= \xi - z = w_0 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)_0 (x - x_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)_0 (y - y_0) + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)_0 (z - z_0),
\end{aligned}
\tag{23}
$$

so kann die Deformation als innerhalb dieses Bereiches homogen an-

gesehen werden[51]). Die Verschiebung aller Punkte des Bereiches stellt sich daher nach Nr. **13** dar als Produkt einer Translation, die den Punkt P_0 in seine endgültige Lage überführt, einer Rotation und einer reinen Deformation. Die Deformation eines Bereiches, welcher einen beliebigen Punkt P umgiebt, hängt somit von den neun Differentialquotienten der Verschiebungskomponenten nach den Koordinaten ab. Sind insbesondere diese neun Differentialquotienten unendlich klein, so hängt die Rotation des Bereiches von den Grössen

$$(23') \quad r_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad r_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad r_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

ab, welche *A. Cauchy*[52]) „mittlere Rotationen der Volumelemente" nennt; dieselben sind mit den halben Komponenten des curl (s. Nr. **5**) des Verschiebungsvektors identisch. Die Formänderung ist durch die Grössen

$$(23'') \quad \frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial v}{\partial y}, \frac{\partial w}{\partial z}, \quad \frac{\partial w}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial z}, \quad \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial x}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}$$

bestimmt, auf deren kinematische Bedeutung wir in Nr. **18** eingehen werden. Aus den obigen Überlegungen folgt, dass man *jede unendlich kleine Verschiebung eines kontinuierlichen Mediums*, beispielsweise die in einem unendlich kleinen Zeitintervalle stattfindende Flüssigkeitsbewegung, *darstellen kann als Superposition einer Translation, einer Rotation und einer Dilatation nach drei senkrechten Richtungen*[51]), [53]). Von *J. Bertrand* sind andere Zerlegungen angegeben worden; die Einwände, welche dieser Autor gegen die Zulässigkeit der obigen Zerlegung erhob, haben sich bei der Diskussion[54]) als unberechtigt herausgestellt.

17. Formänderung (engl. strain)[59]) bei homogener Deformation; Tensoren. Für die Elastizitätstheorie ist die Formänderung von weit grösserer Wichtigkeit, als die Translation und Rotation, da nur die Formänderung elastische Kräfte hervorruft, nicht aber eine Bewegung des Körpers als eines starren. Daher ist es notwendig, zu untersuchen, von welchen Grössen die Formänderung abhängt; wir führen dieses zunächst für die homogene Deformation (22) aus, auf

51) *G. G. Stokes*, Cambr. Trans. 8 (1845), p. 287 = Papers 1, p. 75.

52) *A. Cauchy*, Exercices d'analyse et de physique mathématique 2 (1841), p. 302—330.

53) *H. Helmholtz*, J. f. Math. 55 (1858), p. 25 ff.

54) *J. Bertrand*, Par. C. R. 66 (1868), p. 1227; 67 (1868), p. 267, 469, 773; *H. Helmholtz*, Par. C. R. 67 (1868), p. 221, 754, 1034; s. auch *E. Beltrami*, Tor. Mem. (3) 1 (1871), p. 432.

die sich die heterogene mit Hülfe der Gleichungen (23) zurückführen lässt. Die Formänderung eines Körpers ist offenbar bestimmt, wenn man die Abstände aller Punkte des Körpers vor und nach der Deformation kennt; wie wir oben erwähnten (s. Nr. **12**), sind die Längen zweier paralleler Strecken nach der homogenen Deformation gleich, wenn sie vor derselben gleich waren. *Daher ist die Formänderung bei einer homogenen Deformation* (22) *eindeutig bestimmt durch die Längenänderung aller vom Anfangspunkte ausgehenden Radienvektoren*[55]). Ist aber r die Länge eines vom Anfangspunkte nach dem Punkte (xyz) gezogenen Vektors vor der Deformation, ϱ die Länge des entsprechenden Vektors nach derselben, so ist gemäss Gl. (22):

$$\varrho^2 = r^2 + 2\,[e_x \cdot x^2 + e_y \cdot y^2 + e_z \cdot z^2 + g_{yz} \cdot yz + g_{zx} \cdot zx + g_{xy} \cdot xy], \tag{24}$$

wo zur Abkürzung gesetzt ist

$$\begin{aligned} e_x &= a_{11} + \frac{1}{2}(a_{11}^2 + a_{21}^2 + a_{31}^2), \\ e_y &= a_{22} + \frac{1}{2}(a_{12}^2 + a_{22}^2 + a_{32}^2), \\ e_z &= a_{33} + \frac{1}{2}(a_{13}^2 + a_{23}^2 + a_{33}^2); \end{aligned} \tag{25}$$

$$\begin{aligned} g_{yz} &= a_{23} + a_{32} + (a_{12} \cdot a_{13} + a_{22} \cdot a_{23} + a_{32} \cdot a_{33}), \\ g_{zx} &= a_{31} + a_{13} + (a_{13} \cdot a_{11} + a_{23} \cdot a_{21} + a_{33} \cdot a_{31}), \\ g_{xy} &= a_{12} + a_{21} + (a_{11} \cdot a_{12} + a_{21} \cdot a_{22} + a_{31} \cdot a_{32}). \end{aligned} \tag{25'}$$

Durch diese sechs Grössen ist die Formänderung bestimmt[42]). Für den Winkel, welchen zwei beliebige, anfangs mit den Vektoren r_1, r_2 zusammenfallende Strecken nach der Deformation einschliessen, erhält man die Gleichung

$$\begin{aligned} \varrho_1 \cdot \varrho_2 \cdot \cos(\varrho_1 \varrho_2) = r_1 r_2 \cos(r_1 r_2) + [&2 e_x \cdot x_1 \cdot x_2 + 2 e_y \cdot y_1 \cdot y_2 + 2 e_z \cdot z_1 \cdot z_2 \\ &+ g_{yz}(y_1 z_2 + z_1 y_2) + g_{zx}(z_1 x_2 + x_1 z_2) + g_{xy}(x_1 y_2 + y_1 x_2)]. \end{aligned} \tag{26}$$

Die kinematische Bedeutung der sechs Grössen $e_x, \cdots, g_{xy}$ ergiebt sich aus den Gl. (24) und (26). Es seien x, y, z drei Strecken, die anfänglich in die Koordinatenaxen fielen, a, b, c die Strecken, in welche sie durch die Deformation übergeführt werden. Dann ist[56]):

$$e_x = \frac{a^2 - x^2}{2x^2}, \qquad e_y = \frac{b^2 - y^2}{2y^2}, \qquad e_z = \frac{c^2 - z^2}{2z^2}; \tag{27}$$

$$g_{yz} = \frac{b \cdot c}{y \cdot z} \cos(bc), \quad g_{zx} = \frac{c \cdot a}{z \cdot x} \cos(ca), \quad g_{xy} = \frac{a \cdot b}{x \cdot y} \cdot \cos(ab). \tag{27'}$$

55) *A. E. H. Love*, Treatise on the mathematical theory of elasticity, 1, chap. 1, Cambr. 1892.

56) *G. Green*, Cambr. Trans. 1839 = Papers p. 293—311.

Die ersten drei Grössen geben also die halben relativen Änderungen der Quadrate der Strecken an, welche anfänglich in die Koordinatenaxen fielen, die letzten drei bestimmen die Winkel, welche diese Strecken nach der Deformation einschliessen.

Führt man ein neues rechtwinkliges Koordinatensystem (x', y', z') ein, so folgt aus Gl. (24), da die Längen r, ϱ der Radienvektoren vor und nach der Formänderung vom Koordinatensystem unabhängig sind, dass der Ausdruck

$$(28) \qquad e_x \cdot x^2 + e_y \cdot y^2 + e_z \cdot z^2 + g_{yz} \cdot yz + g_{zx} \cdot zx + g_{xy} \cdot xy$$

invariant gegen Koordinatentransformationen ist.

Ebenso ist der aus den Komponenten A_x, A_y, A_z eines Vektors gebildete Ausdruck:

$$(28') \quad (A_x \cdot x + A_y \cdot y + A_z \cdot z)^2 = A_x^2 \cdot x^2 + A_y^2 \cdot y^2 + A_z^2 \cdot z^2 + 2A_y A_z \cdot yz + 2A_z A_x \cdot zx + 2A_x A_y \cdot xy$$

vom Koordinatensystem unabhängig. Mithin sind die 6 Koeffizienten von x^2, y^2, z^2, $2yz$, $2zx$, $2xy$, in den Ausdrücken (28), (28′) zu einander kogredient (s. Nr. **2** dieses Art.). *Die Transformationsformeln, nach denen die sechs Grössen* e_x, e_y, e_z, $\frac{1}{2}g_{yz}$, $\frac{1}{2}g_{zx}$, $\frac{1}{2}g_{xy}$ *auf wechselnde Koordinatensysteme umzurechnen sind, sind identisch mit den für die Quadrate und Produkte* A_x^2, A_y^2, A_z^2, $A_y A_z$, $A_z A_x$, $A_x A_y$ *von Vektorkomponenten geltenden.* Jenen Komplex von sechs Grössen nennt *J. W. Gibbs*[57]) *„right tensor“*, *W. Voigt*[58]) *bezeichnet ihn als „Tensortripel“ („triple tenseur“ franz.), die 6 Grössen selbst als „Tensorkomponenten“ und überträgt diese Namen auf andere Grössensysteme, welche sich in derselben Weise auf wechselnde Koordinatenaxen transformieren.* Diese Bezeichnungsweisen sind dadurch gerechtfertigt, dass man (s. Nr. **14**) die Formänderung stets als reine Deformation, d. h. als Produkt dreier Dehnungen der Hauptaxen des Deformationsellipsoids betrachten kann.

Die Hauptaxen des Deformationsellipsoids (Nr. **12**) ändern bei der Deformation ihre Winkel nicht, man kann daher ihre anfängliche Lage ermitteln, indem man das Tripel senkrechter Radienvektoren sucht, für das $g_{y'z'} = g_{z'x'} = g_{x'y'} = 0$ ist. Diese Richtungen fallen zusammen mit den Hauptaxen der Flächen zweiten Grades

57) *J. W. Gibbs*, Vector Analysis, New-Haven 1881/84, p. 57. Der Name „Tensor“ wird zuweilen auch in abweichender Bedeutung gebraucht. Vgl. Anm. 5′.

58) *W. Voigt*, Die fundamentalen physikalischen Eigenschaften der Krystalle, Leipz. 1898, p. 20 ff.; Rapport, Paris 1900 u. Gött. Nachr. 1900, Heft 2, p. 4 ff.

$$(29) \qquad x^2 e_x + y^2 e_y + z^2 e_z + yz\, g_{yz} + zx\, g_{zx} + xy\, g_{xy} = \pm 1,$$

deren Radienvektoren nach Gl. (24) alle die nämliche Zunahme oder Abnahme des Quadrates ihrer Länge erfahren. Ergiebt in (29) das obere Vorzeichen ein reelles Ellipsoid, so werden alle Radienvektoren gedehnt; ergiebt das untere ein reelles Ellipsoid, so werden alle kontrahiert. Bestimmt Gl. (29) zwei konjugierte Hyperboloide, so werden die Radienvektoren des einen Hyperboloids bei der Formänderung verlängert, die des anderen verkürzt. Die Bestimmung der Hauptaxen dieser Flächen hängt von der Gleichung dritten Grades ab;

$$\begin{vmatrix} e_x - \sigma & \frac{1}{2} g_{xy} & \frac{1}{2} g_{zx} \\ \frac{1}{2} g_{xy} & e_y - \sigma & \frac{1}{2} g_{yz} \\ \frac{1}{2} g_{zx} & \frac{1}{2} g_{yz} & e_z - \sigma \end{vmatrix} = 0,$$

deren Invarianten [59])

$$(30) \qquad e_x + e_y + e_z, \quad e_y e_z + e_z e_x + e_x e_y - \frac{1}{4}(g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2),$$
$$e_x \cdot e_y \cdot e_z + \frac{1}{4}(g_{yz} \cdot g_{zx} \cdot g_{xy} - e_x \cdot g_{yz}^2 - e_y \cdot g_{zx}^2 - e_z \cdot g_{xy}^2)$$

die primitiven Invarianten des Tensortripels sind.

18. Unendlich kleine heterogene Formänderung; Tensorfelder. In der Mechanik der Kontinua beschränkt man sich in der Regel auf die Betrachtung unendlich kleiner Formänderungen, d. h. solcher, bei denen die relativen Längenänderungen und die Winkeländerungen so kleine Werte besitzen, dass ihre Quadrate und Produkte zu vernachlässigen sind. In diesem Falle gewinnen die sechs Komponenten (27), (27′) des Tensortripels eine vereinfachte Bedeutung. *Die ersten drei Komponenten stellen die relativen Längenänderungen dar, welche anfänglich in die Koordinatenaxen fallende Geraden erfahren, die letzten drei die Verkleinerungen der ursprünglich rechten Winkel, welche jene Geraden einschliessen.* Diese *Dehnungen und Gleitungen* (franz. dilatations et glissements, engl. extensions and shears oder slides, ital. dilatazioni e scorrimenti) werden also bei einer unendlich kleinen Formänderung durch die Gl. (25), (25′) bestimmt.

Wie wir in Nr. **16** gesehen haben, kann man die heterogene Deformation auf die homogene mit Hülfe der Gl. (23) zurückführen.

---

59) *W. J. M. Rankine,* On axes of elasticity and crystalline forms, Lond. Phil. Trans. 146 (1856), p. 261 ff.

Demnach sind die Dehnungen und Gleitungen bei einer unendlich kleinen heterogenen Formänderung[56] [60]*:*

$$
\begin{aligned}
e_x &= \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial x}\right)^2\right),\\
e_y &= \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial y}\right)^2\right),\\
e_z &= \frac{\partial w}{\partial z} + \frac{1}{2}\left(\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial v}{\partial z}\right)^2 + \left(\frac{\partial w}{\partial z}\right)^2\right);\\
g_{yz} &= \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y} + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\cdot\frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial v}{\partial y}\cdot\frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}\cdot\frac{\partial w}{\partial z}\right),\\
g_{zx} &= \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z} + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\cdot\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial z}\cdot\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z}\cdot\frac{\partial w}{\partial x}\right),\\
g_{xy} &= \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\cdot\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}\cdot\frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial x}\cdot\frac{\partial w}{\partial y}\right).
\end{aligned}
\tag{31}
$$

Diese Dehnungen und Gleitungen transformieren sich auf wechselnde Koordinatensysteme wie Tensorkomponenten. Bei einer unendlich kleinen Formänderung besitzen die Flächen (29) die Eigenschaft, dass das reciproke Quadrat eines Radiusvektors die relative Dehnung oder Kontraktion der betreffenden Richtung angiebt[42]).

Die Voraussetzung, dass die Formänderung unendlich klein sei, schliesst nicht aus, dass die Verschiebungen und einige ihrer Differentialquotienten nach den Koordinaten endliche Werte besitzen, da ja die Rotation endlich sein kann. Ist auch die Rotation unendlich klein, so erfahren die Gl. (31) eine Vereinfachung, indem daselbst die Quadrate und Produkte der Differentialquotienten der Verschiebungskomponenten nach den Koordinaten zu vernachlässigen sind; die Dehnungen und Gleitungen nehmen dann die Werte an:

$$
e_x = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_y = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_z = \frac{\partial w}{\partial z};
\tag{32}
$$

$$
g_{yz} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial y}, \quad g_{zx} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial z}, \quad g_{xy} = \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x}.
$$ [61])

Die relative Dilatation der Volumelemente wird in diesem Falle[42]) gleich $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$, d. h. gleich der Divergenz des Verschiebungsvektors.

---

60) *B. de Saint-Venant*, Par. C. R. 24 (1847), p. 260—263; auch in *Navier*, „Leçons sur la résistance des corps solides", 3. éd. 1864, appendix III, p. 589.

61) *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 56 (1858) = Ges. Werke p. 287; Mechanik, Vorl. 11. Er schreibt für die Grössen (32) x_x, y_y, z_z; $y_z = z_y$, $z_x = x_z$, $x_y = y_x$. Eine Tabelle der für die Spannungen von den verschiedenen Autoren gebrauchten Bezeichnungen findet sich bei *Todhunter* and *Pearson*, A History of the theory of elasticity, Vol. I, Cambr. 1886, p. 322, Art. 610.

Bei einer heterogenen Formänderung können die sechs Komponenten des für das „*Tensorfeld*“ charakteristischen Tensortripels nicht unabhängig von einander gewählt werden. Es müssen vielmehr sechs Differentialgleichungen erfüllt sein, wenn die Elemente des Körpers sich auch nach der Deformation stetig an einander schliessen sollen; dieselben ergeben sich durch Elimination der Komponenten u, v, w aus den Gleichungen (31) bezw. (32), und sind für den letzteren Fall von *G. Kirchhoff*[62]), für den allgemeineren Fall, wo die Gl. (31) die Formänderung bestimmen, von *B. de Saint-Venant*[63]) angegeben worden. Sie lauten:

$$(33)\quad \begin{aligned} \frac{\partial^2 g_{yz}}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial^2 e_y}{\partial z^2} + \frac{\partial^2 e_z}{\partial y^2}, & 2\frac{\partial^2 e_x}{\partial y\,\partial z} &= \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial^2 g_{zx}}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial^2 e_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 e_x}{\partial z^2}, & 2\frac{\partial^2 e_y}{\partial z\,\partial x} &= \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} - \frac{\partial g_{zx}}{\partial y} + \frac{\partial g_{xy}}{\partial z}\right),\\ \frac{\partial^2 g_{xy}}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial^2 e_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 e_y}{\partial x^2}; & 2\frac{\partial^2 e_z}{\partial x\,\partial y} &= \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\partial g_{yz}}{\partial x} + \frac{\partial g_{zx}}{\partial y} - \frac{\partial g_{xy}}{\partial z}\right). \end{aligned}$$

Dass diese Bedingungen nicht nur notwendig, sondern auch hinreichend dafür sind, dass sechs Funktionen des Ortes e_x, e_y, e_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} mögliche Werte der Dehnungen und Gleitungen bei einer heterogenen Formänderung sind, hat *E. Beltrami*[64]) bewiesen. Das Tensorfeld, das von den Dehnungen e_x, e_y, e_z und den halben Gleitungen g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} gebildet wird, ist also nicht das allgemeinste stetige Tensorfeld.

19. Spannungen in einem Körper (engl. stress[59]). Erteilt man den Punkten eines kontinuierlich den Raum erfüllenden Körpers eine unendlich kleine Verschiebung mit den Komponenten u, v, w, so sind die Komponenten der unendlich kleinen Rotation der Volumelemente, nach Gl. (23′)

$$r_x = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial w}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial z}\right), \quad r_y = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial z} - \frac{\partial w}{\partial x}\right), \quad r_z = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Gemäss Nr. 5 dieses Art. sind es Komponenten eines axialen Vektors, sie besitzen die Invariante

$$(34)\qquad r_x^2 + r_y^2 + r_z^2.$$

62) *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 56 (1858) = Ges. Werke p. 301; Mechanik, Vorl. 27, p. 398.

63) *B. de Saint-Venant* in Navier, Leçons sur la résistance des corps solides, 3 éd. 1864, appendix III, p. 598.

64) *E. Beltrami*, Bol. Mem. 1886, p. 3; Pal. Rend. 3 (1889); Par. C. R. 108 (1889), p. 502.

Andererseits sind die Formänderungskomponenten durch (23″) bez. (32) gegeben. Sie besitzen nach (30) die quadratische Invariante

$$34') \qquad e_x^2 + e_y^2 + e_z^2 + \frac{1}{2}(g_{yz}^2 + g_{zx}^2 + g_{xy}^2).$$

Die Rotation bezw. Formänderung ist nun von Spannungen im Körper begleitet. Wir schneiden aus dem Körper einen unendlich kleinen Würfel heraus[65]), dessen Seitenflächen den Koordinatenebenen parallel sind, und bezeichnen die Komponenten der Spannung, welche auf die Flächeneinheit der Seiten wirkt, nach *G. Kirchhoff*[61]) mit

$$X_x, Y_x, Z_x, \quad X_y, Y_y, Z_y, \quad X_z, Y_z, Z_z,$$

derart, dass der Index immer die äussere Normale der Seite angiebt, auf welche die betreffende Spannung wirkt. X_x, Y_y, Z_z werden *Normalspannungen*, $X_y, Y_x, Y_z, Z_y, Z_x, X_z$ *Schubspannungen* genannt. Um die geometrische Natur dieser neun Grössen festzustellen, muss man ermitteln, wie sie sich transformieren, wenn man das Koordinatensystem und mithin die Orientierung des elementaren Würfels verändert. Dieses gelingt am einfachsten, indem man den Ausdruck für die Arbeit bildet, welche die Spannungen bei virtuellen Formänderungen und Rotationen leisten, und aus der Invarianz ihres Wertes gegenüber Koordinatentransformationen Schlüsse zieht.

Die auf die Volumeinheit bezogene Arbeit bei virtuellen Dehnungen $\delta e_x, \delta e_y, \delta e_z$ und Gleitungen $\delta g_{yz}, \delta g_{zx}, \delta g_{xy}$ ist[59]) [66])

$$(35) \qquad \delta A' = X_x \delta e_x + Y_y \delta e_y + Z_z \delta e_z$$
$$+ \frac{1}{2}(Y_z + Z_y)\delta g_{yz} + \frac{1}{2}(Z_x + X_z)\delta g_{zx} + \frac{1}{2}(X_y + Y_x)\delta g_{xy},$$

und die Arbeit, die bei virtuellen Rotationen $\delta r_x\, \delta r_y\, \delta r_z$ geleistet wird:

$$(35') \qquad \delta A'' = (Z_y - Y_z)\delta r_x + (X_z - Z_x)\delta r_y + (Y_x - X_y)\delta r_z.$$

Da die virtuellen Änderungen der Tensorkomponenten e_x, e_y, e_z $\frac{1}{2}g_{yz}$, $\frac{1}{2}g_{zx}$, $\frac{1}{2}g_{xy}$ ihrerseits Tensorkomponenten sind, so folgt aus der Invarianz der Ausdrücke (34′) und (35), dass sowohl

$$e_x, e_y, e_z, \frac{1}{2}g_{yz}, \frac{1}{2}g_{zx}, \frac{1}{2}g_{xy},$$

wie $\quad X_x, Y_y, Z_z, \frac{1}{2}(Y_z + Z_y), \frac{1}{2}(Z_x + X_z), \frac{1}{2}(X_y + Y_x)$

---

65) *A. Cauchy*, Exercices de mathématiques 2 (1827), p. 42—56, benutzt ein unendlich kleines Tetraeder statt des Würfels.

66) *W. Thomson*, Lond. Roy. Soc. Trans. 146, 2 (1856), p. 481 ff. = Papers 3, p. 84 ff.

kontragredient (s. Nr. 2 dieses Art.) zu e_x, e_y, e_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} sind. Folglich sind jene beiden Grössensysteme zu einander kogredient[59]). *Die Verbindungen* X_x, Y_y, Z_z, $\frac{1}{2}(Y_z+Z_y)$, $\frac{1}{2}(Z_x+X_z)$, $\frac{1}{2}(X_y+Y_x)$ *von Spannungskomponenten sind daher selbst Komponenten eines Tensortripels*[68]), d. h. sie transformieren sich wie die Quadrate und Produkte von Vektorkomponenten[67]).

Aus (34), (35′) folgt in entsprechender Weise, dass *die Verbindungen* $(Z_y - Y_z)$, $(X_z - Z_x)$, $(Y_x - X_y)$ *der Spannungskomponenten Komponenten eines axialen Vektors* sind[68]); sie geben die von den Spannungen herrührenden *Drehmomente* an. Im allgemeinen setzt man sie in der Elastizitätstheorie gleich null[65]). Wenn aber die von den äusseren Kräften auf den elementaren Würfel ausgeübten Drehmomente bei beliebiger Verkleinerung der Würfelkanten nicht verschwinden, so kommen auch die Drehmomente der inneren Spannungen in Betracht. Dieses ist z. B. im Innern permanenter Magnete der Fall[69]).

Verschwinden die Drehmomente der Spannungen, so kann man den Spannungszustand an einem Punkte vollständig durch die *Fläche zweiten Grades* darstellen:

$$(36)\quad X_x x^2 + Y_y y^2 + Z_z z^2 + 2Y_z yz + 2Z_x zx + 2X_y xy = \pm 1,$$

aus der man die Grösse und Richtung der Spannung ermitteln kann, die auf ein beliebig orientiertes Flächenelement wirkt[65])[70]). Auch andere Flächen zweiten Grades sind zur geometrischen Darstellung der Spannungen verwandt worden[65])[71]).

Tensoren treten nicht nur in der Kinematik und Statik der Kontinua, sondern auch in anderen Disziplinen der mathematischen Physik auf, insbesondere dort, wo lineare Beziehungen zwischen Vektoren eine Rolle spielen (s. Nr. 22 dieses Art.). Auch die Trägheitsmomente (IV 3) eines starren Körpers in Bezug auf Axen, die durch einen festen Punkt gehen, sind durch einen Tensor bestimmt.

Wir haben uns bisher ausschliesslich mit der Kinematik und Statik eines Kontinuums beschäftigt, dessen Zustand durch Angabe der Verschiebung aller seiner Punkte bestimmt ist. Stellt man sich

67) *A. Cauchy*, Exercices de mathématiques 4 (1829), p. 33.

68) *W. Voigt*, Gött. Nachr. 1900, Heft 2, p. 14; Rapport, Paris 1900.

69) *Maxwell*, Treatise 2, art. 641, 642.

70) *W. Thomson*, Papers 3, p. 88; *Thomson-Tait*, Nat. Phil. 2, art. 663 ff.

71) *G. Lamé*, Leçons sur la théorie mathématique de l'élasticité, Paris 1852, 2te Aufl. 1866, p. 53; *F. E. Neumann*, Vorlesungen über die Theorie der Elasticität, Leipz. 1885, p. 32 ff.

auf den Standpunkt der molekularen Hypothese, so erscheint diese Auffassung als eine einseitige, da sie nur die Verschiebungen der Moleküle, nicht die davon unabhängigen Rotationen berücksichtigt. In der That hat man die Grundgleichungen der Elastizitätstheorie durch Heranziehung selbständiger Rotationen der Moleküle erweitert[71']), indem man gleichzeitig die Möglichkeit offen liess, dass die Volumelemente durch ihre Begrenzungsfläche hindurch nicht nur Kräfte, sondern auch Drehmomente auf einander ausüben. Auch sind mechanische Theorieen des elektro-magnetischen Feldes auf Grund ähnlicher Vorstellungen entwickelt worden, indem man die Verschiebungen und Rotationen der Partikel des Mediums ineinander greifen liess, und sich so die Wechselwirkung der Felder eines polaren und eines axialen Vektors veranschaulichte. Nähere Angaben hierüber sollen in Band V Platz finden.

20. Einführung krummliniger Koordinaten in Vektor- und Tensorfelder. Krummlinige Koordinaten sind zuerst in der Mechanik der Systeme mit einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden (*Lagrange*) und in der Flächentheorie (*Gauss*) zur Verwendung gelangt (vgl. Bd. III). Um ihre Einführung in die Mechanik der Kontinua und die mathematische Physik hat sich insbesondere *G. Lamé*[72]) verdient gemacht. Konstruiert man in einem Felde drei Scharen von Flächen

$$f_1(x, y, z) = \alpha, \quad f_2(x, y, z) = \beta, \quad f_3(x, y, z) = \gamma,$$

derart, dass durch jeden Punkt des Feldes eine Fläche von jeder der drei Scharen hindurchgeht, so stellen die Parameter α, β, γ ein System *krummliniger Koordinaten* vor. Die Einführung der Parameter α, β, γ erweist sich als zweckmässig, falls der betreffende Vektor oder Tensor auf bestimmten Flächen $f_1 = \text{const.}$, $f_2 = \text{const.}$, $f_3 = \text{const.}$ vorgeschriebene Grenzbedingungen zu erfüllen hat. Es sind die Parameter α, β, γ so zu wählen, dass durch ihre Angabe ein Punkt des Feldes eindeutig bestimmt ist; dann kann man die Komponenten stets durch einwertige Funktionen der krummlinigen Koordinaten ausdrücken. Hier soll ausführlich nur auf die Einführung orthogonaler Koordinaten eingegangen werden, da fast ausschliesslich solche bei physikalischen Problemen eine Rolle spielen.

Als *orthogonale Koordinaten* bezeichnet man die Parameter α, β, γ dreier Flächenscharen, die sich senkrecht, und demnach, einem Satze

71') Vgl. z. B. *W. Voigt,* Gött. Abh. 34 (1887), p. 1—9. Compendium I, p. 119—128.

72) *G. Lamé*, J. éc. pol. 3, cah. 23 (1834), p. 215, 247; Leçons sur les coordonnées curvilignes, Paris 1859.

von *Ch. Dupin* gemäss, in den Krümmungslinien schneiden. Das Quadrat der Länge des Linienelementes dr, welches die Punkte (α, β, γ) und $(\alpha + d\alpha, \beta + d\beta, \gamma + d\gamma)$ verbindet, ist bei Zugrundelegung orthogonaler Koordinaten

$$dr^2 = \frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \frac{d\gamma^2}{h_3^2}. \tag{37}$$

Die auf die Richtungen der wachsenden (α, β, γ) bezogenen Komponenten eines Vektors A hängen mit den auf die (x, y, z)-Axen bezogenen durch die Gleichungen zusammen

$$\begin{aligned} A_x &= A_\alpha \cdot h_1 \frac{\partial x}{\partial \alpha} + A_\beta \cdot h_2 \frac{\partial x}{\partial \beta} + A_\gamma \cdot h_3 \frac{\partial x}{\partial \gamma}, \\ A_y &= A_\alpha \cdot h_1 \frac{\partial y}{\partial \alpha} + A_\beta \cdot h_2 \frac{\partial y}{\partial \beta} + A_\gamma \cdot h_3 \frac{\partial y}{\partial \gamma}, \\ A_z &= A_\alpha \cdot h_1 \frac{\partial z}{\partial \alpha} + A_\beta \cdot h_2 \frac{\partial z}{\partial \beta} + A_\gamma \cdot h_3 \frac{\partial z}{\partial \gamma}, \end{aligned} \tag{38}$$

deren Koeffizienten den Cosinus der Winkel gleich sind, welche die beiden Axensysteme mit einander bilden. Die Umrechnung der Divergenz (s. Nr. 5) auf die neuen Koordinaten lässt sich ausführen, indem man die neun Differentialquotienten der Komponenten A_x, A_y, A_z nach x, y, z mit Hülfe der Gl. (38) durch die Parameter α, β, γ, die Komponenten A_α, A_β, A_γ und deren nach α, β, γ genommene Differentialquotienten ausdrückt. Die Berechnung der Divergenz ist hierdurch erledigt, die Ermittelung der auf die neuen Axen bezogenen Komponenten des curl (s. Nr. 5) und des aus dem Vektorfelde abzuleitenden Tensorsystems (32) erfordert noch eine Anwendung der für diese Komponenten geltenden Transformationsformeln. Die Rechnungen sind von *G. Lamé*[72]) und *C. Neumann*[73]) ausgeführt und von *E. Beltrami*[74]) auf beliebige krummlinige Koordinaten ausgedehnt worden. Rascher führen folgende Methoden zum Ziele.

a) *Die Methode der bewegten Axen*[75]) ordnet dem Systeme orthogonaler Koordinaten α, β, γ ein rechtwinkliges Cartesisches Axensystem (x_1, y_1, z_1) zu, das durch die Normalen der Flächen $\alpha, \beta, \gamma =$ constans gebildet wird. Geht man nun zu einem benachbarten Punkte $(\alpha + d\alpha, \beta, \gamma)$ über, so muss man dem Koordinatensysteme (x_1, y_1, z_1) bestimmte Rotationen $d\vartheta_1$, $d\vartheta_2$, $d\vartheta_3$ um die Axen erteilen, damit es mit dem veränderten Normalensystem zusammenfällt. Demgemäss

73) *C. Neumann*, J. f. Math. 57 (1860), p. 310 ff.

74) *E. Beltrami*, Tor. Mem. (3) 1 (1871), p. 461 ff.

75) *O. Bonnet*, J. éc. pol. 18 (1845), p. 171; *R. R. Webb*, Mess. of math. 11 (1882), p. 146; *A. E. H. Love*, Treatise on the mathematical theory of elasticity 1, chapter 8.

setzt sich der Zuwachs $\frac{\partial A_{x_1}}{\partial x_1} \cdot dx_1 = \frac{\partial A_{x_1}}{\partial x_1} \cdot \frac{d\alpha}{h_1}$, welchen die Komponente A_{x_1} erfährt, zusammen aus einem Teile, der durch die Abhängigkeit der Komponente A_α von α bedingt ist, und einem zweiten, zu dem die Komponenten A_β, A_γ dem Betrage der Rotationen $(d\vartheta_3)$ bezw. $(-d\vartheta_2)$ proportionale Beiträge liefern. So kann man den Differentialquotienten $\frac{\partial A_{x_1}}{\partial x_1}$, und in analoger Weise alle neun Differentialquotienten der Komponenten A_{x_1}, A_{y_1}, A_{z_1} nach (x_1, y_1, z_1), durch die Parameter $\alpha\beta\gamma$ ausdrücken. Von jenen Differentialquotienten hängen aber die Divergenz, sowie die auf die orthogonalen Koordinaten $\alpha\beta\gamma$ bezogenen Komponenten des curl und des Tensortripels (32) ab.

b) *Man vermeidet überhaupt jede Bezugnahme auf Cartesische Koordinaten, wenn man von den geometrischen bezw. kinematischen Definitionen ausgeht, durch die wir in Nr.* **5** *die Divergenz und den curl eines Vektors, in Nr.* **17** *und* **18** *die Komponenten eines Tensortripels definierten.*

Der *Gauss*'sche Satz (8) ergiebt, auf das Volumelement

$$d\tau = \frac{d\alpha \cdot d\beta \cdot d\gamma}{h_1 h_2 h_3},$$

mit den Seitenflächen $\frac{d\beta\, d\gamma}{h_2 h_3}$, $\frac{d\gamma\, d\alpha}{h_3 h_1}$, $\frac{d\alpha\, d\beta}{h_1 h_2}$ angewandt:

$$(39) \qquad \operatorname{div} A = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{A_\alpha}{h_2 h_3}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A_\beta}{h_3 h_1}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{A_\gamma}{h_1 h_2}\right)\right].$$

Diesen Weg zur *Umrechnung der Divergenz* scheint zuerst *W. Thomson* eingeschlagen zu haben[76]). *G. Lamé*[77]), *L. Dirichlet* und *B. Riemann*[78]) haben diese Ableitung in ihren Vorlesungen vorgetragen. Ist das Feld des Vektors A ein potentielles, also $A = -\nabla\varphi$, so folgt aus (39):

$$(40) \qquad \nabla^2\varphi = h_1 h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{h_1}{h_2 h_3}\frac{\partial \varphi}{\partial \alpha}\right) + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{h_2}{h_3 h_1}\frac{\partial \varphi}{\partial \beta}\right) + \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{h_3}{h_1 h_2}\frac{\partial \varphi}{\partial \gamma}\right)\right]$$

als Ausdruck des *Laplace'schen Operators* in orthogonalen Koordinaten.

In analoger Weise hat man, um die auf die neuen Axen bezogenen *Komponenten des curl* zu ermitteln, den *Stokes*'schen Satz (10) anzuwenden, etwa auf ein Element einer Fläche $\alpha =$ constans vom

76) *W. Thomson,* Cambr. math. J. 4 (1843) = Coll. pap. 1, p. 25.
77) *G. Lamé*, Leçons sur les coordonnées curvilignes § 16, 1859.
78) S. hierüber *Heine*, „Handbuch der Kugelfunktionen" 1, p. 307.

Flächeninhalt $\frac{d\beta \cdot d\gamma}{h_2 h_3}$ und den Seitenlängen $\frac{d\beta}{h_2}$, $\frac{d\gamma}{h_3}$. So erhält man[79]:

$$(\operatorname{curl} A)_\alpha = h_2 h_3 \left[\frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A_\gamma}{h_3}\right) - \frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{A_\beta}{h_2}\right)\right],$$

und dem entsprechend

$$(41) \qquad (\operatorname{curl} A)_\beta = h_3 h_1 \left[\frac{\partial}{\partial \gamma}\left(\frac{A_\alpha}{h_1}\right) - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{A_\gamma}{h_3}\right)\right],$$

$$(\operatorname{curl} A)_\gamma = h_1 h_2 \left[\frac{\partial}{\partial \alpha}\left(\frac{A_\beta}{h_2}\right) - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(\frac{A_\alpha}{h_1}\right)\right].$$

Die kinematische Bedeutung der Tensorkomponenten (32) beruht darauf, dass sie die Dehnungen und Gleitungen bei einer unendlich kleinen, heterogenen Deformationen bestimmen. Geben

$$e_\alpha,\ e_\beta,\ e_\gamma,\ g_{\beta\gamma},\ g_{\gamma\alpha},\ g_{\alpha\beta}$$

die Dehnungen und Gleitungen an, welche zu den Flächen $\alpha = \text{const.}$, $\beta = \text{const.}$, $\gamma = \text{const.}$ normale Linienelemente bezw. Elemente jener Flächen erfahren, so muss, den Transformationseigenschaften der Tensoren zu Folge, die Dehnung e_r einer beliebigen Richtung r den Wert besitzen:

$$(42) \qquad \begin{aligned} e_r = {} & e_\alpha \cdot c_{r\alpha}^2 + e_\beta \cdot c_{r\beta}^2 + e_\gamma \cdot c_{r\gamma}^2 + g_{\beta\gamma} \cdot c_{r\beta} \cdot c_{r\gamma} \\ & + g_{\gamma\alpha} \cdot c_{r\gamma} \cdot c_{r\alpha} + g_{\alpha\beta} \cdot c_{r\alpha} \cdot c_{r\beta}; \end{aligned}$$

die $c_{r\alpha}$, $c_{r\beta}$, $c_{r\gamma}$ geben hier die Cosinus der Winkel an, welche die Richtung r mit den Normalen der Flächen α, β, $\gamma = \text{constans}$ einschliesst. Deutet man A als Verschiebungsvektor, so sind die Änderungen, welche die Parameter α, β, γ bei der Verschiebung erfahren, nach Gl. (37)

$$\delta\alpha = A_\alpha \cdot h_1, \quad \delta\beta = A_\beta \cdot h_2, \quad \delta\gamma = A_\gamma \cdot h_3.$$

Ferner ist die Längenänderung eines Elementes dr zu bestimmen aus

$$2\delta dr \cdot dr = \delta\left(\frac{d\alpha^2}{h_1^2} + \frac{d\beta^2}{h_2^2} + \frac{d\gamma^2}{h_3^2}\right).$$

Berechnet man hieraus die Dehnung dieses Elementes $e_r = \frac{\delta dr}{dr}$ und berücksichtigt, dass dieselbe bei beliebiger Orientierung des Elementes der durch (42) gegebenen gleich sein muss, so erhält man[80]:

---

79) *E. Cesàro*, Introduzione alla teoria matematica della elasticità, Tor. 1894, p. 197; *M. Abraham*, Math. Ann. 52 (1899), p. 86.

80) *C. W. Borchardt*, J. f. Math. 67 (1873), p. 45; *E. Beltrami*, Ann. di mat. (2) 10 (1881), p. 188.

$$
\begin{aligned}
e_\alpha &= h_1 \cdot \frac{\partial A_\alpha}{\partial \alpha} - \frac{h_2}{h_1} \cdot A_\beta \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \beta} - \frac{h_3}{h_1} \cdot A_\gamma \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \gamma}, \\
e_\beta &= h_2 \cdot \frac{\partial A_\beta}{\partial \beta} - \frac{h_3}{h_2} \cdot A_\gamma \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \gamma} - \frac{h_1}{h_2} \cdot A_\alpha \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}, \\
e_\gamma &= h_3 \cdot \frac{\partial A_\gamma}{\partial \gamma} - \frac{h_1}{h_3} \cdot A_\alpha \cdot \frac{\partial h_3}{\partial \alpha} - \frac{h_2}{h_3} \cdot A_\beta \cdot \frac{\partial h_3}{\partial \beta}; \\
g_{\beta\gamma} &= h_3 \cdot \frac{\partial A_\beta}{\partial \gamma} + h_2 \frac{\partial A_\gamma}{\partial \beta} + \frac{h_3}{h_2} \cdot A_\beta \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \gamma} + \frac{h_2}{h_3} \cdot A_\gamma \cdot \frac{\partial h_3}{\partial \beta}, \\
g_{\gamma\alpha} &= h_1 \cdot \frac{\partial A_\gamma}{\partial \alpha} + h_3 \frac{\partial A_\alpha}{\partial \gamma} + \frac{h_1}{h_3} \cdot A_\gamma \cdot \frac{\partial h_3}{\partial \alpha} + \frac{h_3}{h_1} \cdot A_\alpha \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \gamma}, \\
g_{\alpha\beta} &= h_2 \cdot \frac{\partial A_\alpha}{\partial \beta} + h_1 \frac{\partial A_\beta}{\partial \alpha} + \frac{h_2}{h_1} \cdot A_\alpha \cdot \frac{\partial h_1}{\partial \beta} + \frac{h_1}{h_2} \cdot A_\beta \cdot \frac{\partial h_2}{\partial \alpha}.
\end{aligned}
\tag{43}
$$

Kann man in dieser Weise die Transformation auf beliebige orthogonale Koordinaten ausführen, indem man auf die vom gewählten Koordinatensystem unabhängigen, d. h. invarianten Eigenschaften der Vektor- und Tensorfelder zurückgeht, so kann man auch die Aufgabe folgendermassen formulieren: es sind direkt die Invarianten aufzusuchen, welche aus den Koeffizienten im Ausdruck (37) für das Quadrat des Linienelementes und den auf die krummlinigen Koordinaten bezogenen Komponenten des Vektor- bezw. Tensorfeldes zu bilden sind; in dieser Weise verfährt die von *G. Ricci* ausgearbeitete[81]) *„absolute Differentialrechnung“*.

c) *C. G. J. Jacobi*[82]) vereinfachte die Umrechnung der *Laplace*schen Gleichung auf krummlinige Koordinaten, indem er dieselbe auf ein *Variationsproblem* zurückführte; die Verwendbarkeit dieser Methode beruht auf dem Umstande, dass in dem zu variierenden Integrale nur ein *Skalar* auftritt; sie lässt sich erheblich verallgemeinern. *Die Differentialgleichungen der mathematischen Physik lassen sich nämlich in der Regel auf die Form von Variations- oder Minimalproblemen bringen, und enthalten in dieser Form nur skalare Funktionen der Komponenten des Vektor- und Tensorfeldes*, die meist mit der Feldenergie zusammenhängen. *Hat man die Vektor- bezw. Tensorkomponenten* nach einer der soeben dargelegten Methoden *auf die neuen, krummlinigen Koordinaten umgerechnet, so kann man von dem Variations- bezw. Minimalproblem direkt zu den Differentialgleichungen in krummlinigen Koordinaten gelangen.* Näheres darüber findet man in den Art. IV 16 und 22.

---

81) *G. Ricci*, Lezioni sulla teoria delle superfizie, Padova 1898; *G. Ricci* u. *T. Levi-Civita*, Math. Ann. 54 (1900), p. 125.

82) *C. G. J. Jacobi*, J. f. Math. 36 (1848), p. 117 = Ges. Werke 2, p. 198.

III. Wechselwirkungen der Felder von Skalaren, Vektoren und Tensoren.

21. Symmetrie physikalischer Erscheinungen und Krystallsymmetrie. Wir teilten die Grössen, welche zur Charakterisierung der in der Mechanik der Kontinua und in der Physik auftretenden Felder verwandt worden sind, in Klassen ein, die durch das Verhalten der Komponenten bei Drehungen des rechtwinkligen Koordinatensystems gekennzeichnet wurden. Skalare bleiben hierbei invariant; die Komponenten eines Vektors (Nr. 2) transformieren sich den Gl. (1) gemäss, während Tensorkomponenten (Nr. 17) sich wie die Quadrate und Produkte von Vektorkomponenten verhalten. Berücksichtigt man ferner Inversionen des Koordinatensystems, so sind polare und axiale Vektoren (Nr. 3) zu unterscheiden, sowie zwei Arten skalarer Grössen (Nr. 11). Dementsprechend kann man den bisher ausschliesslich in Betracht gezogenen (axialen) Tensoren solche polarer Art entgegenstellen, die bei Inversionen das Vorzeichen wechseln. Bei den Wechselwirkungen verschiedener Felder kommen diese letzteren Grössen in Betracht (Nr. 22), sowie auch solche geometrische Grössen, die sich wie die Verbindungen 3^{ten} und 4^{ten} Grades von Vektorkomponenten transformieren (Nr. 23).

Ein homogenes Feld einer gerichteten Grösse besitzt stets eine gewisse Symmetrie; als *Gruppe der Symmetrie* des Feldes bezeichnet man die Gruppe derjenigen Koordinatentransformationen, welche die einem jeden Punkte des Feldes zugehörigen Werte der Komponenten ungeändert lassen, derart, dass die Komponenten, auf die transformierten Axen bezogen, die alten Werte annehmen. Die Symmetriegruppe eines homogenen Vektorfeldes enthält die Gruppe der Drehungen um die Richtung des Vektors; für den polaren Vektor ist dieselbe durch Spiegelungen an Ebenen, die durch die Richtung des Vektors gelegt sind, für den axialen durch Spiegelungen an der zur Axe senkrechten Ebene zu erweitern. Ein homogenes Tensorfeld endlich besitzt die Symmetrie eines Ellipsoids, d. h. im allgemeinen drei auf einander senkrechte Symmetrieebenen.

Eine physikalische Erscheinung ist aufzufassen als Wechselwirkung der Felder mehrerer Zustandsgrössen. *Die Gruppe der Symmetrie einer Erscheinung ist die den Symmetriegruppen aller in Wechselwirkung tretenden Felder gemeinsame Untergruppe.* Denn diese Untergruppe enthält die Gesamtheit derjenigen Koordinatentransformationen, welche die Komponenten aller in Wechselwirkung tretenden Zustandsgrössen und demnach auch den mathematischen Aus-

druck des Gesetzes ihrer Wechselwirkung ungeändert lassen. Die Erscheinung der *Pyroelektrizität* beispielsweise lässt Wechselwirkungen zwischen den homogenen Feldern eines Skalars (der Temperatur) und eines polaren Vektors (der elektrischen Polarisation) erkennen. Die Symmetriegruppe dieser Erscheinung ist die des Vektors, da dessen Gruppe zugleich Untergruppe der Symmetrie des Skalars ist.

Betrachtet man die Gesamtheit der in einer Substanz auftretenden Wechselwirkungen, und setzt deren Symmetriegruppen zusammen, so kann es vorkommen, dass die erhaltene Gruppe nicht die aller möglichen Koordinatentransformationen ist; alsdann wird man der Substanz, in der die Erscheinung sich abspielt, eine anisotrope oder asymmetrische Struktur zuschreiben müssen. Andrerseits werden alle Symmetrieen der Struktur einer Substanz in Symmetrieen der in derselben auftretenden physikalischen Erscheinungen sich kundgeben. *Die Symmetriegruppe der Struktur einer Substanz ist die gemeinsame Untergruppe aller in der Substanz auftretenden Wechselwirkungen*[83]).

Für *homogene feste Krystalle* gilt nun erfahrungsgemäss ein Gesetz, welches besagt, dass die Symmetriegruppe der Struktur mit der Gruppe der krystallographischen Symmetrie (s. V 8), die sich in den Wachstumserscheinungen kundgiebt, zusammenfällt. Man kann es auch folgendermassen formulieren: *Krystallographisch gleichwertige Richtungen sind stets auch physikalisch gleichwertig*[84]); oder: *Die Gruppe der krystallographischen Symmetrie ist eine Untergruppe der Symmetrieen aller in dem Krystalle möglichen physikalischen Erscheinungen*[85]).

Dieses Gesetz gestattet es, einerseits, wenn die geometrische Natur gewisser Zustandsgrössen bekannt ist, vorherzusagen, in welchen Krystallen Wechselwirkungen ihrer Felder auftreten können; es erlaubt andrerseits, aus solchen Wechselwirkungen Anhaltspunkte für die Bestimmung der Symmetrie einer Zustandsgrösse zu gewinnen, welche für ihre Einordnung in eine bestimmte Klasse geometrischer Grössen massgebend ist. So kann elektrische Polarisation infolge von Temperaturerhöhung nur Krystallen ohne Symmetriecentrum zugeschrieben werden, wenn man die elektrische Polarisation als polaren Vektor betrachtet; aus dem Umstande, dass in der That Pyroelektri-

---

83) *P. Curie*, J. de phys. (3) 3 (1894), p. 393 ff.

84) Wohl zuerst ausgesprochen von *F. E. Neumann*, s. Vorlesungen über die Theorie der Elastizität, herausgeg. von *O. E. Meyer*, Leipz. 1885; s. auch *W. Voigt*, Compendium 1, p. 128 ff.

85) *B. Minnigerode*, Gött. Nachr. 1884, p. 195.

zität gewissen acentrischen Krystallen, und nur solchen zukommt, schliesst man, dass jene Voraussetzung gerechtfertigt war, dass die elektrische Polarisation ein polarer Vektor ist (s. Nr. **22** dieses Art.).

22. Wechselwirkungen von Vektorfeldern.

a) *Homogene Felder.* Wir fassen zunächst eine Wechselwirkung zweier homogener Vektorfelder ins Auge, deren Gesetz durch *lineare Gleichungen zwischen den Komponenten der Vektoren k und i* ausdrückbar ist:

$$\begin{aligned} k_x &= k_{11}\, i_x + k_{12}\, i_y + k_{13}\, i_z, \\ k_y &= k_{21}\, i_x + k_{22}\, i_y + k_{23}\, i_z, \\ k_z &= k_{31}\, i_x + k_{32}\, i_y + k_{33}\, i_z. \end{aligned} \tag{44}$$

Derartige Beziehungen bestehen beispielsweise zwischen Temperaturgefälle und Wärmestrom (s. V 5), sowie zwischen elektrischer Kraft und elektrischer Strömung (s. V 17). Wir nennen k die Kraft und i die Strömung. Das Ellipsoid

$$\begin{aligned} 1 = k_{11}x^2 + k_{22}y^2 + k_{33}z^2 + (k_{23} + k_{32})yz + (k_{31} + k_{13})zy \\ + (k_{12} + k_{21})xy \end{aligned} \tag{45}$$

wird *„Leitfähigkeitsellipsoid“* genannt[86]). Das Quadrat des der Strömung parallelen Radiusvektors des Leitfähigkeitsellipsoids ist gleich dem Quotienten aus der Strömung und der in Richtung der Strömung fallenden Komponente der Kraft.

Man zerlegt[87]) die „lineare Vektorfunktion“ (s. Nr. **13** dieses Art.) k in den symmetrischen und antisymmetrischen Teil, indem man setzt

$$k = k' + k''; \tag{46}$$

$$\begin{aligned} k_x' &= k_{11}\, i_x + \tfrac{1}{2}(k_{12} + k_{21})\, i_y + \tfrac{1}{2}(k_{31} + k_{13})\, i_z, \\ k_y' &= \tfrac{1}{2}(k_{12} + k_{21})\, i_x + k_{22}\, i_y + \tfrac{1}{2}(k_{23} + k_{32})\, i_z, \\ k_z' &= \tfrac{1}{2}(k_{31} + k_{13})\, i_x + \tfrac{1}{2}(k_{23} + k_{32})\, i_y + k_{33}\, i_z; \end{aligned} \tag{46'}$$

$$\begin{aligned} k_x'' &= \tfrac{1}{2}(k_{12} - k_{21})\, i_y - \tfrac{1}{2}(k_{31} - k_{13})\, i_z, \\ k_y'' &= \tfrac{1}{2}(k_{23} - k_{32})\, i_z - \tfrac{1}{2}(k_{12} - k_{21})\, i_x, \\ k_z'' &= \tfrac{1}{2}(k_{31} - k_{13})\, i_x - \tfrac{1}{2}(k_{23} - k_{32})\, i_y. \end{aligned} \tag{46''}$$

86) *J. Boussinesq*, Par. C. R. 63 (1869), p. 104; J. de math. 14 (1869), p. 265.
87) *G. G. Stokes*, Cambr. Dubl. math. Journ. 6 (1851), p. 215.

Sind die Vektoren k und i beide polarer, oder beide axialer Art, so sind die Koeffizienten der symmetrischen linearen Vektorfunktion k'

$$k_{11}, k_{22}, k_{33}, \quad \frac{1}{2}(k_{23} + k_{32}), \quad \frac{1}{2}(k_{31} + k_{13}), \quad \frac{1}{2}(k_{12} + k_{21})$$

Komponenten eines (axialen) Tensors[68]. Konstruiert man den der Strömung i parallelen Radiusvektor des Leitfähigkeitsellipsoids (45), so ist k' der im Endpunkt errichteten Normalen parallel. *Die Koeffizienten der antisymmetrischen linearen Vektorfunktion k''*

$$\frac{1}{2}(k_{23} - k_{32}), \quad \frac{1}{2}(k_{31} - k_{13}), \quad \frac{1}{2}(k_{12} - k_{21})$$

sind Komponenten eines axialen Vektors P.[88]) Der Vektor k'' steht senkrecht auf der Strömung i und ist der Ebene des axialen Vektors P parallel. Ein derartiger aus den Koeffizienten einer linearen Vektorfunktion gebildeter axialer Vektor P tritt auf bei der elektrischen Strömung im magnetischen Felde, wie der sogenannte *„Halleffekt"* zeigt[89]). Man schliesst hieraus[90]), dass *der magnetische Vektor axialer Art ist.*

Ist einer der beiden Vektoren i, k polarer, der andere axialer Art, so sind die Koeffizienten von (46') *Komponenten eines polaren Tensors*[91]), *diejenigen von* (46'') *Komponenten eines polaren Vektors.*

Die Spezialisierung der Gleichungen (44) zwischen Vektoren derselben Art für die verschiedenen krystallographischen Gruppen ist von *B. Minnigerode*[91']) durchgeführt worden.

b) *Heterogene Felder.* Die moderne *Elektrodynamik* (s. V 13) statuiert Wechselwirkungen der Felder von vier Zustandsgrössen, der *elektrischen Kraft* (E) und *Induktion* (D) und der *magnetischen Kraft* (H) und *Induktion* (B), die insbesondere in nichtleitenden ruhenden Körpern folgendermaassen zu formulieren sind:

$$(47) \qquad \frac{1}{c}\frac{\partial D}{\partial t} = \operatorname{curl} H, \qquad (47') \quad \operatorname{div} D = 4\pi e;$$

$$(48) \qquad -\frac{1}{c}\frac{\partial B}{\partial t} = \operatorname{curl} E, \qquad (48') \quad \operatorname{div} B = 4\pi m.$$

Die Induktionen hängen mit den betreffenden Kräften durch Gleichungen von der Form der symmetrischen linearen Vektorfunktion (46') zusammen.

---

88) *W. Thomson,* Edinb. Trans. 11 (1857), p. 165 = Papers 1, p. 282.

89) *W. Thomson,* Papers 1 (1882), p. 281.

90) *F. Kolaçeck,* Ann. Phys. Chem. 55 (1895), p. 503.

91) *W. Voigt,* Gött. Nachr. 1900, Heft 4, p. 355—379. Mit „polarer Tensor" gleichbedeutend wird dort der von *P. Curie* vorgeschlagene Name „Torsor" gebraucht.

91') *B. Minnigerode,* Jahrb. f. Mineralogie 1 (1886), p. 1.

c ist eine Konstante, nämlich die Lichtgeschwindigkeit im Äther. Die Divergenz der elektrischen bezw. der magnetischen Induktion giebt die mit 4π multiplizierte Dichte der „wahren Elektrizität (e)“ bezw. des „wahren Magnetismus (m)“ an. Aus den Grundgleichungen (47), (48) folgt mit Hülfe des Gauss'schen Satzes (Gl. 8), dass die Mengen der Elektrizität und des Magnetismus, die sich innerhalb einer geschlossenen, nur im Isolator verlaufenden Fläche befinden, sich zeitlich nicht ändern. Während aber wahre Elektrizität existiert, und ihre Konstanz allgemeines Gesetz ist, existiert wahrer Magnetismus nicht. Da auch in isotropen Körpern eine elektrische Kraft elektrische Induktion, eine magnetische Kraft magnetische Induktion hervorruft, so *gehören die Induktionen zu derselben Klasse geometrischer Grössen, wie die betreffenden Kräfte.* Mit Rücksicht hierauf und auf Nr. **5** und **11** dieses Artikels lassen die Gl. (47), (48) folgende beiden Deutungen zu[29]):

Entweder die magnetische Kraft ist ein polarer und die elektrische ein axialer Vektor, oder die elektrische Kraft ist ein polarer und die magnetische ein axialer Vektor. Die Entscheidung zu gunsten der letzteren Deutung haben die Erscheinungen der Pyroelektrizität (s. Nr. **21** dieses Art.) *und des Halleffekts* (s. Nr. **22**, a)) *geliefert.* Die Dichte der Elektrizität ist daher die Divergenz eines polaren Vektors, die des Magnetismus die Divergenz eines axialen Vektors. Erstere Grösse gehört den Skalaren erster Art an, letztere würde, wenn sie existierte, den in Nr. **11** dieses Artikels erwähnten Skalaren zweiter Art zuzuzählen sein, die sich von denen erster Art durch Vorzeichenwechsel bei Inversionen des Koordinatensystems unterscheiden.

Eliminiert man aus den Gleichungen, welche die vier Zustandsgrössen des elektromagnetischen Feldes verknüpfen, drei derselben, so erhält man die Differentialgleichung, welche die zeitliche Änderung des heterogenen Feldes der vierten Grösse reguliert. Diese enthält neben Differentialquotienten nach der Zeit, nur Differentialquotienten 2^{ter} Ordnung der Komponenten nach den Koordinaten. Somit wird durch Umkehrung einer der Koordinatenaxen nichts geändert, es sind also zwei Vorgänge, die sich spiegelbildlich verhalten, in gleicher Weise möglich. Will man *dissymmetrische Vorgänge*, wie *die natürliche Drehung der Polarisationsebene des Lichtes*, die keine Spiegelung gestatten, mathematisch formulieren, so muss man Differentialquotienten nach den Koordinaten von ungerader Ordnung heranziehen, sei es, dass man mit *A. Cauchy*[92]) solche erster Ordnung, oder mit

92) *A. Cauchy*, Par. C. R. 15 (1842), p. 916.

J. Mc. Cullagh[93]) solche dritter Ordnung bevorzugt. Hierbei treten lineare Beziehungen der Komponenten eines polaren und eines axialen Vektors, somit *polare Tensoren* auf[91]). Wie es das Grundgesetz der Krystallphysik (Nr. **21** dieses Art.) verlangt, tritt bei circular-polarisierenden Krystallen diese Dissymmetrie auch an der Krystallform hervor. Es giebt Flüssigkeiten, die isotrop sind, d. h. bei denen alle Richtungen physikalisch gleichwertig sind, und die dennoch die Polarisationsebene des Lichtes drehen; die Symmetriegruppe dieser Substanzen (s. Nr. **21** d. Art.) enthält zwar die Gruppe der Drehungen des Koordinatensystems, aber nicht Inversionen; solche Körper nennt *J. Boussinesq*[94]) *isotrop-dissymmetrisch.* Ihre Dissymmetrie kommt auch bei ihrem chemischen Verhalten zur Geltung.

23. Wechselwirkungen, bei denen Tensorfelder ins Spiel kommen.

a) *Wechselwirkung zweier Tensorfelder.* Wie wir gesehen haben, ist sowohl die Formänderung (Nr. **17** d. Art.), wie die Spannung, welche sich einer Formänderung widersetzt (Nr. **19** d. Art.), durch ein System von sechs Tensorkomponenten charakterisiert. In deformierbaren Körpern stehen diese in einer gesetzmässigen Beziehung, die im einfachsten Falle durch lineare Gleichungen auszudrücken ist[95]):

$$
\begin{aligned}
X_x &= c_{11}\,e_x + c_{12}\,e_y + c_{13}\,e_z + c_{14}\,g_{yz} + c_{15}\,g_{zx} + c_{16}\,g_{xy},\\
Y_y &= c_{21}\,e_x + c_{22}\,e_y + c_{23}\,e_z + c_{24}\,g_{yz} + c_{25}\,g_{zx} + c_{26}\,g_{xy},\\
Z_z &= c_{31}\,e_x + c_{32}\,e_y + c_{33}\,e_z + c_{34}\,g_{yz} + c_{35}\,g_{zx} + c_{36}\,g_{xy},\\
\tfrac{1}{2}(Y_z+Z_y) &= c_{41}\,e_x + c_{42}\,e_y + c_{43}\,e_z + c_{44}\,e_{yz} + c_{45}\,g_{zx} + c_{46}\,g_{xy},\\
\tfrac{1}{2}(Z_x+X_y) &= c_{51}\,e_x + c_{52}\,e_y + c_{53}\,e_z + e_{54}\,g_{yz} + c_{55}\,g_{zx} + c_{56}\,g_{xy},\\
\tfrac{1}{2}(X_y+Y_z) &= c_{61}\,e_x + c_{62}\,e_y + c_{63}\,e_z + c_{64}\,g_{yz} + c_{65}\,g_{zx} + c_{66}\,g_{xy}.
\end{aligned}
\tag{49}
$$

Die „lineare Tensorfunktion“ (49) wird symmetrisch, d. h. es gelten 15 Gleichungen $c_{ik} = c_{ki}$, welche die Zahl der Koeffizienten auf 21 reduzieren, wenn die bei der Formänderung aufgewandte Arbeit A' (Gl. 35) vom Wege unabhängig ist und nur von den endgültigen

---

93) *J. Mc. Cullagh*, Irish Trans. 17 (1836) = Coll. works p. 63.

94) *J. Boussinesq*, J. de math. 13 (1868), p. 319.

95) *A. Cauchy*, Exercices de mathématiques 4 (1829), p. 296; *Poisson*, J. éc. polyt. cah. 20 (1831), p. 1—174.

Werten der Komponenten der Formänderung abhängt[96]). Diese Annahme, die sich thermodynamisch begründen lässt (IV, 21), ergiebt

$$X_x = \frac{\partial A'}{\partial e_x}, \quad Y_y = \frac{\partial A'}{\partial e_y}, \quad Z_z = \frac{\partial A'}{\partial e_z},$$

$$\frac{1}{2}(Y_z + Z_y) = \frac{\partial A'}{\partial g_{yz}}, \quad \frac{1}{2}(Z_x + X_z) = \frac{\partial A'}{\partial g_{zx}}, \quad \frac{1}{2}(X_y + Y_x) = \frac{\partial A'}{\partial g_{xy}}, \tag{50}$$

und es wird die Formänderungsarbeit (das elastische Potential):

$$\begin{aligned} A' = {} & \frac{1}{2} c_{11} e_x^2 + \frac{1}{2} c_{22} e_y^2 + \frac{1}{2} c_{33} e_z^2 + \frac{1}{2} c_{44} g_{yz}^2 + \frac{1}{2} c_{55} g_{zx}^2 + \frac{1}{2} c_{66} g_{xy}^2 \\ & + c_{12} e_x e_y + c_{13} e_x e_z + c_{14} e_x g_{yz} + c_{15} e_x g_{zx} + c_{16} e_x g_{xy} \\ & + c_{23} e_y e_z + c_{24} e_y g_{yz} + \cdots \\ & + c_{34} e_z g_{yz} + \cdots . \end{aligned} \tag{51}$$

Diejenige molekulare Hypothese, welche die zwischen den Molekülen wirksamen Kräfte nur von der Entfernung abhängig annimmt, führt ausserdem zu den Relationen (vgl. IV, 21)

$$c_{44} = c_{23}, \quad c_{55} = c_{31}, \quad c_{66} = c_{12}, \quad c_{56} = c_{14}, \quad c_{64} = c_{25}, \quad c_{45} = c_{36}, \tag{51'}$$

welche die Zahl der Koeffizienten der Gl. (49) auf 15 reduzieren.

Die 21 Koeffizienten in (51) sind geometrisch darzustellen durch eine Fläche 4^{ten} und eine 2^{ten} Grades[97]),[98]), deren 15 bezw. 6 Parameter sich auf wechselnde Koordinatensysteme transformieren, wie die *Verbindungen 4ter Ordnung von Vektorkomponenten*, bezw. wie die *Komponenten eines* (axialen) *Tensors*. Die 6 Tensorkomponenten verschwinden, wenn die Relationen (51') gelten, welche vom Standpunkte der molekularen Hypothese aus als für das Fehlen von der Richtung abhängiger Kräfte zwischen den Molekülen charakteristisch anzusehen sind[97]) [98]).

Die Symmetrieelemente der einzelnen Krystallsysteme führt man in die Gleichungen (50), (51) ein, indem man die Bedingungen dafür aufstellt, dass der Skalar A', auf krystallographisch gleichwertige Richtungen bezogen, dieselben Koeffizienten c_{ik} besitzt[97]) [99]). Man kann auch direkt die Frage aufwerfen, welche diskontinuierlichen Gruppen der Symmetrie mit Gleichungen von der Form (50), (51)

96) *G. Green,* Cambr. Trans. 7 (1838) = Papers p. 249.

97) *W. J. M. Rankine,* Lond. Phil. Trans. 1856, p. 261 ff.

98) *B. de Saint-Venant,* J. de math. (2) 8 (1863), p. 257.

99) *F. E. Neumann,* Vorlesungen über die Theorie der Elastizität p. 164; *G. Kirchhoff,* Mechanik p. 389; *W. Voigt,* Ann. Phys. Chem. 16 (1882), p. 275; *B. Minnigerode,* Gött. Nachr. 1884, p. 195, 374, 488.

zwischen zwei Tensortripeln verträglich sind, und gelangt zu dem Resultate[100]), dass in die hier möglichen Gruppen sich die Gruppen der krystallographischen Symmetrie als Untergruppen einordnen, wie es das Grundgesetz der Krystallphysik (s. Nr. **21** d. Art.) verlangt. In isotropen Körpern kann das elastische Potential (51) nur von den beiden primitiven Invarianten ersten und zweiten Grades (30) des Tensorensystems abhängen, daher reduzieren sich hier die Konstanten auf zwei. Werden indessen auch Glieder dritten Grades im elastischen Potential isotroper Körper berücksichtigt[101]), so ist die dritte der Invarianten (30) mit heranzuziehen.

b) *Wechselwirkungen eines Skalarfeldes und eines Tensorfeldes* treten auf, wenn durch Temperaturerhöhung Spannungen hervorgerufen werden. Die Symmetrie dieses Vorgangs ist die des Tensors; daraus ergeben sich unmittelbar die in einem Krystalle möglichen Formen des für das Tensorfeld charakteristischen Ellipsoids. Für isotrope Körper degeneriert dasselbe in eine Kugel.

c) *Wechselwirkungen eines Vektorfeldes und eines Tensorfeldes* sind im einfachsten Falle durch lineare Gleichungen zu formulieren. *Die 18 Koeffizienten derselben kann man durch Kombination von 3 geometrischen Grössen darstellen*, nämlich *durch eine gerichtete Grösse dritter Ordnung*, deren 10 Komponenten sich bei Drehung des Koordinatensystems wie die Verbindungen dritter Ordnung von Vektorkomponenten transformieren, *einen Tensor*, dessen Komponenten einer gewissen einschränkenden Bedingung unterworfen sind — man kann etwa die Summe der ersten drei Komponenten des Tensors gleich null setzen — *und einen Vektor*[91]). Die polare oder axiale Art dieser drei gerichteten Grössen ergiebt sich unmittelbar aus derjenigen des Vektors und Tensors, die in Wechselwirkung treten. Wenn durch Spannung elektrische Kräfte, oder durch elektrische Kräfte Spannungen hervorgerufen werden, so hat man es mit Wechselwirkungen eines (axialen) Tensors und eines polaren Vektors zu thun, was bei der Spezialisierung für die verschiedenen Krystallsysteme[102]) zu beachten ist. Hingegen tritt an Stelle des polaren Vektors ein axialer, wenn im magnetischen Felde Spannungen hervorgerufen werden. Die umgekehrte Erscheinung, die Erregung magnetischer Kräfte durch

---

100) *H. Aron*, Ann. Phys. Chem. 20 (1883), p. 272; *C. Somigliana*, Rom. Acc. Linc. (5) 3 (1894), p. 238 und (5) 4 (1895), p. 25.

101) *W. Voigt*, Ann. Phys. Chem. 52 (1894), p. 536; Wien. Ber. 103 (1894), p. 1069; *J. Finger*, Wien. Ber. 103 (1894), p. 163, 231, 1073.

102) *W. Voigt*, Gött. Abh. 1890.

Spannungen, ist bisher nicht beobachtet worden, obwohl sie, nach der Symmetrie, in gewissen Krystallen möglich wäre[103]).

Genauere Ausführungen über die hier angedeuteten Beziehungen zwischen den verschiedenen Zustandsgrössen der Mechanik und Physik finden sich in den betreffenden Artikeln von Band IV und V. Hier handelte es sich nur um eine allgemeine Übersicht, welche die geometrischen Grundbegriffe hervortreten liess.

103) *W. Voigt,* Gött. Nachr. 1901, Heft 1.

(Abgeschlossen im Februar 1901.)

IV 15. HYDRODYNAMIK: PHYSIKALISCHE GRUNDLEGUNG.

Von

A. E. H. LOVE

IN OXFORD.

Inhaltsübersicht.

1. Der Begriff des Flüssigkeitsdruckes.
2. Die Gleichgewichtsbedingungen.
3. Eine ruhende inkompressible Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere.
4. Schwimmende Körper.
5. Der Luftdruck.
6. Die ersten Untersuchungen über Flüssigkeitsbewegung.
7. Kinematik der Flüssigkeiten.
8. Bewegungsgleichungen der idealen Flüssigkeiten.
9. Flüssigkeit, die wie ein starrer Körper rotiert.
10. Die Druckgleichung. Ausfluss von Flüssigkeiten. (Die *vena contracta*.)
11. Erhaltung der Energie in idealen Flüssigkeiten.
12. Der Begriff der Flüssigkeitsreibung.
13. Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten.
14. Dissipation der Energie.
15. Folgerungen aus den Bewegungsgleichungen (Ausbreitung von Wirbelbewegung, Bewegung einer Pendelkugel, Abnahme der Wellenbewegung).
16. Laminarbewegung.
17. Turbulente Bewegungen.
18. Labilität der Laminarbewegung.
19. Beziehungen zur Molekulartheorie.

Litteratur.

Lehrbücher.

I. Newton, Philosophiae Naturalis Principia Mathematica, London 1687, 2. Aufl. 1714, 3. Aufl. 1726. Die Citate im Text beziehen sich auf die 3. Aufl. (*Principia*).

D. Bernoulli, Hydrodynamica sive de viribus et motibus fluidorum commentarii, Strassburg 1738.

J. le Rond d'Alembert, Essai d'une nouvelle théorie de la résistance des fluides, Paris 1752.

J. L. de Lagrange, Mécanique analytique 2 Bde., Paris 1788, 3. Aufl. herausg. von J. Bertrand 1853, Oeuvres de Lagrange, t. 11, 12, Paris 1888, 1889. Die Citate im Text beziehen sich auf die 3. Aufl. (*Méc. an.*).

Sir *W. Thomson* and *P. G. Tait*, Treatise on Natural Philosophy, Oxford 1867 (deutsch von Helmholtz und Wertheim, Braunschweig 1871); 2. Aufl. in 2 Teilen, Cambridge 1879—1883. Die Citate im Text beziehen sich auf die 2. Aufl. (*Nat. Phil.*).

G. Kirchhoff, Vorlesungen über mathematische Physik, Mechanik, Leipzig 1876, 3. Aufl. 1883. Die Citate im Text beziehen sich auf die 3. Aufl. (*Mechanik*).

H. Lamb, A treatise on the mathematical theory of the motion of fluids, Cambridge 1879. Deutsch von R. Reiff, Freiburg u. Tübingen 1884.

M. Rühlmann, Hydromechanik oder die technische Mechanik flüssiger Körper, 2. Aufl., Hannover 1880.

A. B. Basset, A treatise on Hydrodynamics, 2 vols, Cambridge 1888.

A. G. Greenhill, A treatise on Hydrostatics, London 1894.

H. Lamb, Hydrodynamics, Cambridge 1895.

W. Wien, Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1900.

P. Appell, Traité de Mécanique rationelle, t. 3, Paris 1900.

W. Voigt, Elementare Mechanik, 2. Aufl., Leipzig 1901.

B. Riemann, Vorlesungen über partielle Differentialgleichungen. Neubearbeitung von *H. Weber*, Bd. 2, Braunschweig 1901 (unter der Presse).

Monographien.

L. Euler, Principes généraux de l'état de l'équilibre des fluides, Berlin, Hist. de l'Acad. 11 (1755); Principes généraux du mouvement des fluides, Berlin, Hist. de l'Acad. 11 (1755); De principiis motus fluidorum, Petersburg, Novi Comm. 14 (1770).

G. G. Stokes, On the theories of the internal friction of fluids in motion, and the equilibrium and motion of elastic solids, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1845), wiederabgedruckt in *G. G. Stokes*, Mathematical and Physical Papers vol. 1, Cambridge 1880 (*Stokes, Friction*); Report on recent researches in Hydrodynamics, Brit. Assn. Rep. 1846, und Math. and Phys. Papers, vol. 1 (*Stokes, Report*); On the effect of the internal friction of fluids on the motion of pendulums, Cambr. Phil. Soc. Trans. 9 (1851), (*Stokes, Pendulums*).

H. Helmholtz, Über Integrale der hydrodynamischen Gleichungen, welche den Wirbelbewegungen entsprechen, J. f. Math. 55 (1858), und Wissenschaftliche Abhandlungen 1, Leipzig 1882 (*Wirbelbewegung*).

E. Beltrami, Sui principi fondamentali dell' idrodinamica, Bol. Mem. (3) 1, 2, 3, 5 (1871—1874).

A. G. Greenhill, Artikel „Hydromechanics" in der Encyclopaedia Britannica, 9. Aufl., Bd. 12. Edinburgh 1881 (*Ency. Brit.*).

W. M. Hicks, Report on recent progress in Hydrodynamics, Brit. Assn. Rep. 1881, 1882, (*Hicks, Report*).

J. Boussinesq, Essai sur la théorie des eaux courantes, Paris, Mém. div. sav. 23 (1877), (*Eaux courantes*), abgekürzt als Théorie de l'écoulement tourbillonnant et tumultueux des liquides dans les lits rectilignes à grande section, Paris 1897.

O. Reynolds, An experimental investigation of the circumstances which determine whether the motion of water shall be direct or sinuous, and of the law of resistance in parallel channels, Lond. Phil. Trans. 174 (1883).

F. Auerbach, Hydrostatik, Hydrodynamik, Ausfluss und Strahlbildung, gemeinschaftliche Bewegung fester und flüssiger Körper, Wirbelbewegung, in *A. Winkelmann*'s Handbuch der Physik, Breslau 1891.

Liste der gewählten Bezeichnungen (auch für IV, 16 gültig).

p Druck in einem Punkte.
ϱ Dichte.
X, Y, Z äussere Kraft.
V Potential der äusseren Kraft.
g Beschleunigung durch die Schwere.
u, v, w Geschwindigkeitskomponenten einer Flüssigkeit.
q Resultierende Geschwindigkeit einer Flüssigkeit.
$\frac{\delta}{\delta t}$ Operationssymbol $= \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}$.
a, b, c, f, g, h Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit (rates of strain).
Θ $\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z}$.
ξ, η, ζ Komponenten der Drehgeschwindigkeit (spin).
ω Resultierende Drehgeschwindigkeit (spin).
φ Geschwindigkeitspotential.
ν Kinematischer Reibungskoeffizient.
Δ Läplace'scher Operator $= \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$.
ψ Stromfunktion.

Bem. Als Einheiten werden in diesem und dem folgenden Artikel C.-G.-S. Einheiten und Celsiusgrade benutzt.

---

1. Der Begriff des Flüssigkeitsdruckes. Der grundlegende Begriff in der Hydrodynamik ist der Begriff des Flüssigkeitsdruckes. *Archimedes* scheint zu seiner Einführung in die Mechanik durch die allgemeine Erfahrung veranlasst zu sein[1]). Er stellte den Grundsatz auf[2]), dass jeder Teil einer Flüssigkeit von anderen Teilen gedrückt wird, und benutzte die so erhaltene Vorstellung vom Flüssigkeitsdruck zum Aufbau einer Theorie schwimmender Körper[3]). Am Ende des 16. Jahrhunderts belebte *Stevin*[4]) das Studium der Hydrostatik von neuem. Er wandte die Grundsätze des *Archimedes* an, um den Druck auf den Boden und auf die Wände eines mit Flüssigkeit gefüllten Gefässes zu bestimmen. Bis dahin bestand zwischen der

1) Nach *Lagrange,* Méc. an. 1, p. 167.

2) *R. S. Heath*, The Works of Archimedes, Cambridge 1897; *E. Heiberg*, Archimedis Opera omnia, Leipzig 1880, 1881. *Archimedes* schrieb ein Buch *περὶ οχουμένων,* welches nur in einer lateinischen Übersetzung unter dem Titel „de iis quae in humido vehuntur" erhalten ist.

3) Von *Lagrange*, Méc. an. 1, p. 168 als „une théorie de la stabilité des corps flottants, à laquelle les modernes ont peu ajouté" bezeichnet.

4) *Simon Stevin*, De Beghinselen des Waterwichts, Leyden 1586; französische Übersetzung in *S. Stevin*, Oeuvres mathématiques, Leyden 1634.

Hydrostatik und der allgemeinen Statik keine Verbindung. *Galilei*[5]) suchte die Methoden der allgemeinen Statik auf das Gleichgewicht der Flüssigkeiten mit Hülfe des Prinzips der virtuellen Verrückungen anzuwenden. Dasselbe Prinzip wurde mit Erfolg von *Pascal*[6]) und später, in grösserer Allgemeinheit, von *Lagrange*[7]) angewandt. Das Problem, die Hydrostatik mit der allgemeinen Statik zu verbinden, wurde von *Newton*[8]) dadurch grundsätzlich erledigt, dass er bemerkte, dass jeder in Ruhe befindliche Flüssigkeitsteil, der durch irgend einen andern Körper von derselben Gestalt und Dichte ersetzt wird, in Ruhe bleibt. Insbesondere kann der Körper, durch welchen der Flüssigkeitsteil ersetzt wird, ein starrer sein. Bis zu dem Erscheinen von *Euler*'s Abhandlung[9]) aus dem Jahre 1755 stellte man sich den Druck, der auf einen Flüssigkeitsteil wirkt, allgemein als das Gewicht einer auf ihm lastenden Flüssigkeitssäule vor, und nahm stillschweigend an, dass der Druck in allen Richtungen um einen Punkt herum derselbe sei. *Euler* führte eine allgemeinere Auffassung, wie folgt, ein: Man bezeichne die Flüssigkeit auf der einen Seite einer Oberfläche mit F_1 und die Flüssigkeit (oder einen andern Körper) auf der andern Seite der Oberfläche mit F_2; die Teilchen von F_1, die in unmittelbarer Berührung mit der Oberfläche stehen, üben Kräfte auf die benachbarten Teilchen von F_2 aus; man kann diese Kräfte so ansehen, als ob sie aus infinitesimalen Normaldrucken vom Typus $p\,dS$, genommen über jedes Oberflächenelement dS, zusammengesetzt seien. *Euler* nahm p unabhängig von der Orientierung von dS an und erhielt daraufhin die allgemeinen Gleichungen für das Gleichgewicht einer unter Einwirkung irgendwelcher Kräfte stehenden Flüssigkeit durch Anwendung des oben erwähnten *Newton*'schen Prinzips. Die Grösse p ist der „Druck in einem Punkte". In dem Werke von *Lagrange*[7]) wurde der Flüssigkeitsdruck in einem Punkte einer inkompressiblen Flüssigkeit als der Multiplikator eingeführt, welcher in der Gleichung der virtuellen Verrückungen auftritt, wenn die Variationen der Koordinaten der Inkompressibilitätsbedingung unterworfen sind. Für eine kompressible Flüssigkeit wurde der Druck weniger präzis

5) *Galileo Galilei*, Discorso intorno alle cose che stanno su l'acqua, o che in quella si muovono, Firenze 1612; *G. Galilei*, Opere 12, Firenze 1854.

6) *Blaise Pascal*, Traité de l'équilibre des liqueurs, Paris 1663; Oeuvres de Pascal 4, Paris 1819.

7) Méc. an. 1, p. 173—206.

8) Principia, Lib. 2, Prop. 20, Cor. 4. Das Resultat wird oft als „das Archimedische Prinzip" angeführt; vgl. Fussn. 21.

9) Berlin, Hist. de l'Acad. 11 (1755).

durch die Einführung eines beim Zusammendrücken auftretenden elastischen Widerstandes definiert. In beiden Fällen leitete sich die in allen Richtungen herrschende Gleichheit des Druckes aus den von *Lagrange* angenommenen Prinzipien ab. *Cauchy*[10]) erkannte, dass der Flüssigkeitsdruck ein spezieller Fall des allgemeinern Begriffs eines innern Spannungszustandes (stress)[11]) in einem mechanischen System ist, und zeigte, dass eine immer normal gegen das Oberflächenelement wirkende Spannung notwendigerweise in allen Richtungen um einen Punkt herum dieselbe ist.

In der „rationellen" Mechanik der Flüssigkeiten nimmt man von einer Flüssigkeit an, dass sie einen Raumteil kontinuierlich ausfülle, und definiert sie als ein mechanisches System, für welches in der Ruhelage die Spannung überall ein rein normaler Druck ist. Man nennt eine Flüssigkeit „ideal", wenn man einen rein normalen Druck erhält, einerlei ob die Flüssigkeit sich in Ruhe oder Bewegung befindet. Eine nicht ideale Flüssigkeit heisst zäh.

2. Die Gleichgewichtsbedingungen[12]). Die Gleichgewichtsbedingungen einer unter Einwirkung irgend welcher Kräfte stehenden Flüssigkeit besagen, dass der in irgend einer geschlossenen Oberfläche[13]) befindliche Flüssigkeitsteil genau so im Gleichgewicht ist, wie ein starrer Körper, auf den die äusseren Kräfte[14]) und die über die Oberfläche hin verteilten Drucke wirken. Sind X, Y, Z die äusseren Kräfte, bezogen auf die Masseneinheit und parallel zu festgewählten, rechtwinkeligen Koordinatenaxen, und bezeichnet ϱ die Dichte in einem Punkte (x, y, z), so lauten die Gleichungen

$$\varrho X = \frac{\partial p}{\partial x}, \quad \varrho Y = \frac{\partial p}{\partial y}, \quad \varrho Z = \frac{\partial p}{\partial z}.$$

Es folgt, dass $\varrho(X\,dx + Y\,dy + Z\,dz)$ das vollständige Differential[15]) einer einwertigen Funktion von x, y, z ist, und dass also die Flüs-

---

10) Exercices de mathématiques 2, Paris 1827, p. 23 und 54. Oeuvres (2) 7, p. 37—39.

11) Siehe IV 14, Nr. 19.

12) *Euler* (Fussnote 9). Siehe auch *Poisson,* Traité de mécanique 2, Paris 1833, p. 17; *Kirchhoff,* Mechanik, p. 126.

13) *Greenhill*, Ency. Brit., leitet die Gleichungen aus diesem Prinzip mit Hülfe des *Green*'schen Satzes ab (II A 2, Nr. 46).

14) Die *äusseren Kräfte* sind diejenigen, welche von den Teilchen ausserhalb der Oberfläche, die mit letzterer nicht in unmittelbarer Berührung sind, auf die Teilchen innerhalb der Oberfläche ausgeübt werden.

15) Dies war *d'Alembert* bekannt, Essai . . . de la résistance des fluides, Paris 1752.

sigkeit sich nur in Gleichgewicht befinden kann, wenn X, Y, Z die Bedingung

$$X\left(\frac{\partial Y}{\partial z}-\frac{\partial Z}{\partial y}\right)+Y\left(\frac{\partial Z}{\partial x}-\frac{\partial X}{\partial z}\right)+Z\left(\frac{\partial X}{\partial y}-\frac{\partial Y}{\partial x}\right)=0$$

erfüllen. Dieses zeigt, dass es möglich sein muss, die Kraftlinien durch ein System von Oberflächen[16]) orthogonal zu schneiden. Es sind dies die Flächen konstanten Druckes. Ist das Kraftfeld konservativ und die Dichte veränderlich, so ist Gleichgewicht nur möglich, wenn der Druck p eine einwertige Funktion der Dichte ϱ ist. Umgekehrt kann eine elastische Flüssigkeit, in welcher p proportional mit ϱ, oder eine Funktion von ϱ ist, nur im Gleichgewicht sein, wenn das Kraftfeld konservativ ist. Für eine homogene, inkompressible Flüssigkeit, die unter Einwirkung von konservativen, aus einem Potential V abgeleiteten Kräften steht, können die Gleichgewichtsgleichungen in der Form $\frac{p}{\varrho}=V+\text{const.}$[17]) integriert werden. Für eine elastische Flüssigkeit ist die entsprechende Form $\int\frac{dp}{\varrho}=V+\text{const.}$ Das auftretende Integral ist in der Flüssigkeit auf irgend einem Wege von einem festen Punkte zu dem Punkte, in welchem p benutzt werden soll, zu erstrecken.

3. Eine ruhende, inkompressible Flüssigkeit unter Einwirkung der Schwere[18]). In einer ruhenden homogenen Flüssigkeit, die unter Einwirkung der Schwere steht, sind die Flächen konstanten Druckes Horizontalebenen. Der Druck in einer Tiefe z unter der freien Oberfläche ist $g\varrho z$, wo g die Beschleunigung der Schwere bedeutet. Der Druck der Flüssigkeit auf irgend ein Stück einer Oberfläche kann in Vertikal- und Horizontaldruck zerlegt werden. Der nach unten gerichtete Vertikaldruck ist durch das Integral $g\varrho\iint nz\,dS$, genommen über das Oberflächenstück, gegeben; n ist der Cosinus des Winkels, den die von der Flüssigkeit weggezogene Oberflächennormale mit der nach unten gerichteten Vertikalen bildet. Dieser Ausdruck ist dem Gewichte einer Flüssigkeitssäule gleich, die auf dem Oberflächenstück

16) Die ersten Spuren dieses Resultates finden sich in *Huygens*, Dissertatio de causa gravitatis, Opera reliqua 2, Amsterdam 1728; wegen des Resultates selber vgl. IV **14**, Nr. **9**.

17) Dass die freie Oberfläche eine Niveaufläche ist, wurde von *Clairaut* bewiesen, Théorie de la figure de la terre, Paris 1743.

18) *Poisson*, Traité de Mécanique 2, p. 565 ff.; *Kirchhoff*, Mechanik, p. 133, 134. Einzelheiten, die spezielle Fälle betreffen, sind in *Greenhill*, Hydrostatics, Ch. 1, 2 gegeben.

steht und bis zur freien Oberfläche[19]) emporreicht, vorausgesetzt, dass n für das Oberflächenstück positiv ist. Der Druck parallel einer gegebenen Horizontalen ist gleich einer Einzelkraft, die durch das über das Oberflächenstück genommene Integral $g\varrho\iint lz\,dS$ gegeben ist; l ist der Cosinus desjenigen Winkels, den die von der Flüssigkeit weggezogene Oberflächennormale mit der gegebenen Geraden bildet. Diese Horizontalkomponente ist, was Grösse und Wirkungsrichtung anbelangt, mit dem resultierenden Druck auf die Projektion des Oberflächenstücks auf eine Ebene, die rechtwinkelig zu der gegebenen Geraden steht, identisch. Der resultierende Druck auf eine in irgend einer Stellung gegebene ebene Fläche geht durch einen bestimmten Punkt der Fläche, das sogenannte *Druckcentrum* derselben. Wenn wir die Gerade, in welcher die ebene Fläche die freie Oberfläche schneidet, zur x-Axe wählen und die y-Axe dazu senkrecht auf der Ebene ziehen, haben wir die Koordinaten $\bar{x}$, $\bar{y}$ des Druckcentrums durch die Gleichungen

$$\bar{x}\iint y\,dx\,dy = \iint xy\,dx\,dy,$$
$$\bar{y}\iint y\,dx\,dy = \iint y^2\,dx\,dy$$

gegeben, wo die Integrale, die rechter Hand gewisse Trägheitsintegrale[20]) sind, über die ebene Fläche genommen werden. Der mittlere Druck auf eine Fläche ist gleich dem Druck in ihrem Schwerpunkte.

4. Schwimmende Körper. Wenn man einen festen Körper ganz oder teilweise in eine homogene Flüssigkeit, die unter der Einwirkung der Schwere steht, eintaucht, so ist der Druck in jedem Punkte der Körperoberfläche gleich einem Drucke, der sich ergiebt, wenn das von dem Körper eingenommene Volumen mit Flüssigkeit von der Dichte der umgebenden Flüssigkeit ausgefüllt wird. Der Gesamtdruck der Flüssigkeit gegen den Körper ist mit einer Einzelkraft, der sogenannten „Auftriebskraft", gleichbedeutend. Diese ist gleich dem Gewichte der verdrängten Flüssigkeit und wirkt durch den Schwerpunkt C des eingetauchten Volumens aufwärts[21]). Der Punkt C heisst das Auftriebscentrum. Wenn der Körper frei schwimmt, so ist die Auftriebskraft gleich dem Gewichte W des Körpers. Die Vertikale durch das Auftriebscentrum geht dann durch den Schwerpunkt G des Körpers. Die freie Oberfläche der Flüssigkeit schneidet

19) *S. Stevin,* Fussn. 4; *Poisson,* Fussn. 18.
20) Siehe IV 3.
21) Dieses Resultat ist als das „Archimedische Prinzip" bekannt.

von dem Körper ein Volumen $V' = \frac{W}{g\varrho}$ ab. Jede Ebene, die von dem Körper das Volumen V' abschneidet, ist eine „Schwimmebene", die Enveloppe der verschiedenen Schwimmebenen heisst die „Schwimmoberfläche". Diese Oberfläche berührt jede Schwimmebene in einem Punkte F, welcher der Schwerpunkt des im Körper von der Schwimmebene gebildeten Schnittes ist. Die Schwimmoberfläche ist also der Ort des Punktes F. Der Ort von C für verschiedene Lagen von F ist eine Oberfläche, welche „Auftriebsfläche" oder Fläche C genannt werden kann. Die Tangentialebenen an diese Flächen für C und F in korrespondierenden Punkten sind parallel. Die durch F gehenden Hauptträgheitsaxen des im Körper von der Schwimmebene gebildeten Schnittes sind den durch C gehenden Tangenten an die Hauptkrümmungslinien der Fläche C parallel. Die Hauptkrümmungsradien dieser Oberfläche sind $\frac{J_1}{V'}$ und $\frac{J_2}{V'}$, wo J_1 und J_2 die Hauptträgheitsmomente des im Körper durch die Schwimmebene gebildeten Schnittes sind. Die entsprechenden Krümmungsmittelpunkte M_1 und M_2 heissen „Metacentren"[22]). Die Gleichgewichtslagen eines schwimmenden Körpers werden bestimmt, indem man von G Normalen zu der Fläche C zieht. Die Theorie des Gleichgewichts und der Stabilität schwimmender Körper ist dann identisch mit der Theorie des Gleichgewichts und Stabilität eines auf einer Horizontalebene ruhenden Hülfskörpers, dessen Oberfläche die Fläche C und dessen Massenmittelpunkt der Punkt G ist. Für die Gleichgewichtslage des Körpers bezeichne M eins der beiden Metacentren und J das entsprechende Trägheitsmoment. Wird dann der Körper um die entsprechende Trägheitsaxe durch F um den kleinen Winkel ϑ gedreht, so ist die potentielle Energie des Systems nach dieser Lagenänderung um $\frac{1}{2} W \cdot GM \cdot \vartheta^2$ vermehrt oder vermindert, je nachdem M oberhalb oder unterhalb von G liegt, d. h. je nachdem $\frac{J}{V'} \gtrless GC$ ist. Das Kräftepaar $W \cdot GM \cdot \vartheta$, welches durch die Auftriebskraft und das Gewicht des Körpers gebildet wird, strebt im ersteren Falle den Körper aufzurichten, im letzteren ihn umzustürzen[23]). Für stabiles

22) Die Geometrie schwimmender Körper, insofern sie auf den Flächen C und F beruht, verdankt man *C. Dupin,* Applications de Géométrie et de Méchanique à la Marine, Paris 1822. Die Formel $\frac{dJ}{dV'}$ für den Krümmungsradius des Ortes für F wurde von *É. Leclert* gegeben, Mess. of math. (2) 1 (1872). Diese Formel ist von *E. Guyou,* Théorie du Navire, Paris 1887, 2. Aufl. 1894, verallgemeinert worden. Die Gestalten der Oberflächen C und F werden in einer Anzahl spezieller Fälle von *A. G. Greenhill,* Hydrostatics, Ch. 5 diskutiert.

23) *C. Dupin* (Fussn. 22) hat die Bedingungen der Stabilität untersucht,

Gleichgewicht müssen beide Metacentren über G liegen; die Höhen von M_1 und M_2 über G sind die „metacentrischen Höhen". Fallen zwei Hauptträgheitsaxen des schwimmenden Körpers in F mit den Trägheitsaxen des im Körper von der Schwimmebene gebildeten Schnittes zusammen, so sind die Perioden der Schwingungen gleich denen einfacher Pendel von den Längen $\frac{K_1^2}{h_1}$ und $\frac{K_2^2}{h_2}$. K_1, K_2 sind dabei die Hauptträgheitsradien des Körpers für die horizontalen Trägheitsaxen durch F; h_1, h_2 sind die entsprechenden metacentrischen Höhen. Die Trägheit der Flüssigkeit ist bei diesem Ansatz vernachlässigt.

5. Luftdruck. Die Thatsache, dass Luft eine Flüssigkeit ist, die auf andere Körper durch Druck wirkt, scheint zuerst von *Torricelli* und *Otto von Guericke*[24]) bemerkt worden zu sein. Die Beziehung zwischen dem Druck in einer Luftmasse und dem Volumen, das sie einnimmt, wurde zuerst von *Boyle*[25]) untersucht. Wenn die Temperatur konstant bleibt, sind Druck und Dichte eines Gases durch das *Boyle*'sche Gesetz $\frac{p}{\varrho} = \text{const.}$ mit einander verbunden. Ist die Temperatur veränderlich und sind die Zustandsänderungen adiabatisch, so existiert eine andere Beziehung zwischen dem Druck und der Dichte[26]), nämlich $\frac{p}{\varrho^\gamma} = \text{const.}$, wo γ das Verhältnis der spezifischen Wärme bei konstantem Druck zu der spezifischen Wärme bei konstantem Volumen ist (für Luft ist γ angenähert 1,408). Die Idee, dass die Abnahme der Barometerhöhe beim Emporsteigen über die Erdoberfläche zur Messung der Berghöhen benutzt werden könnte,

---

indem er den Sinn dieses Kräftepaares betrachtete. Die Energiemethode wird auf das Problem von *Thomson* und *Tait*, Nat. Phil. 2, p. 320—324 angewandt. Systematisch entwickelte die Theorie mit dieser Methode *E. Guyou* (Fussn. 22). Eine ausgedehnte Bibliographie findet sich in *J. Pollard* et *A. Dudebout*, Architecture Navale, Paris 1890—1894. Die Bedingungen der Stabilität schwimmender Körper und von Flüssigkeiten, die mit einander in Berührung stehen, sind vom Standpunkte des thermodynamischen Potentials von *P. Duhem*, J. de math. (5) 1, 2, 3 (1895—1897) behandelt worden.

24) Siehe *E. Mach*, Die Mechanik in ihrer Entwickelung, Leipzig 1883, ins Englische übersetzt unter dem Titel „The Science of Mechanics", London 1893.

25) *R. Boyle*, Nova experimenta physico-mechanica de vi aëris elastica, Oxford 1661. Englische Übersetzung, Oxford 1662 und Works of Hon. R. Boyle 1, 3, London 1772. Dasselbe Gesetz wurde von *E. Mariotte*, De la nature de l'air, Paris 1679, Oeuvres de Mariotte, La Haye 1740, gefunden.

26) *Poisson*, Traité de Mécanique 2, p. 637 ff.; wegen der Geschichte des Resultats siehe *P. Duhem*, Hydrodynamique, Élasticité, Acoustique, Paris 1891.

verdankt man *Pascal*[27]). Bei der Anwendung der allgemeinen hydrostatischen Gleichungen auf das Gleichgewicht der unter Einwirkung der Schwere stehenden Atmosphäre[28]) können wir zunächst die Temperatur als konstant annehmen. Wir finden dann die Formel

$$p = p_0 e^{-g\varrho_0 z a/p_0(z+a)},$$

wo p_0 und ϱ_0 der Druck und die Dichte an der Erdoberfläche, p der Druck in einer Höhe z über der Oberfläche und a der Erdradius ist. Um Änderungen .der Temperatur in Betracht zu ziehen, verlangen wir, dass eine Beziehung zwischen Höhe und Temperatur gegeben ist. Infolge der langsamen Wärmeleitung in der Luft kann die Beziehung zwischen Druck und Dichte auch hier dem Gesetz $\frac{p}{\varrho^\gamma} = \text{const.}$ folgen. Man bezeichnet diesen Zustand der Atmosphäre als „konvectives Gleichgewicht“[29]). Der Druck in der Höhe z ist dann durch die Gleichung

$$1 - \left(\frac{p}{p_0}\right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = \frac{\gamma-1}{\gamma}\frac{\varrho_0}{p_0}\frac{gaz}{a+z}$$

gegeben.

6. Die ersten Untersuchungen über Flüssigkeitsbewegung. Den Anstoss zum Studium der Flüssigkeitsbewegung gab die Beobachtung *Torricelli*'s[30]), dass ein Flüssigkeitsstrahl, der aus einem Gefäss ausfliesst, mit grosser Annäherung bis zum Niveau der freien Oberfläche emporsteigen kann. Um diesen Gegenstand weiter zu verfolgen, betrachtete *Newton*[31]) den Ausfluss einer Flüssigkeit durch eine Öffnung im Boden des Gefässes. Er beobachtete, dass sich der Strahl nach seinem Austritt zusammenzieht[32]), bis die Fläche des engsten Querschnittes nahezu $1/\sqrt{2}$ der Fläche der Öffnung ist. Er fand ferner, indem er die Menge, die in einer bestimmten Zeit ausfliesst, mass, dass die Geschwindigkeit in dem engsten Querschnitt sehr nahe gleich derjenigen ist, die sich beim Herabfallen von der freien Oberfläche ergeben würde. Bei der theoretischen Untersuchung nahm nun *Newton* an, dass die Flüssigkeitsteilchen, die einmal in einem

27) Pesanteur de l'air, Paris 1663; Oeuvres de Pascal 4, Paris 1819.

28) *Poisson*, Traité de Mécanique 2, p. 609 ff.; *Kirchhoff*, Mechanik, p. 127.

29) Sir *W. Thomson*, Manch. Phil. Soc. Proc. (3) 2 (1862) = Math. and Phys. Papers 3, Cambr. 1890, p. 255; *Greenhill*, Hydrostatics, p. 314, 491.

30) De motu gravium naturaliter accelerato, Firenze 1643. Citiert von *Lagrange*, Méc. an. 2, p. 244; vgl. *Rühlmann*, Hydromechanik, p. 187.

31) Principia, Lib. 2, Prop. 36.

32) Principia, 2. Aufl. (1714).

horizontalen Querschnitte sich befinden, bei der Bewegung stets einen horizontalen Querschnitt bilden. Es ist dies die „Annahme von den parallelen Querschnitten". Er führte auch die „Kontinuitätsgleichung" ein, und zwar in der Form, dass die Geschwindigkeit in einem Querschnitt umgekehrt proportional mit seinem Flächeninhalt ist. Die Annahme der parallelen Querschnitte zusammen mit der Kontinuitätsgleichung führte ihn zu dem Schlusse, dass, wenn das Gefäss eine bestimmte Gestalt hat, sich die Flüssigkeitsteilchen ohne Widerstand bewegen können, und dass somit die Geschwindigkeit des Strahls diejenige sein muss, welche durch das *Torricelli*'sche Theorem bestimmt wird. Das Problem des Strahlausflusses (mit Zugrundelegung der Annahme der parallelen Querschnitte) ist das eigentliche Hauptproblem der älteren Hydrodynamik[33]), weit mehr als das Problem des Widerstandes, den eine Flüssigkeit auf einen sich in ihr bewegenden Körper ausübt. Übrigens ist letzteres Problem auch schon von *Newton*[34]) behandelt worden. In *D. Bernoulli*'s *Hydrodynamica* wurde das *Torricelli*'sche Theorem durch Anwendung derselben Ideen erhalten, die *Huygens* zu der Theorie des Pendels[35]) führten und sich auf die Änderungen der Geschwindigkeit in einem zusammengesetzten Systeme beziehen. *D'Alembert*[15]) scheint der erste gewesen zu sein, der die Bildung der allgemeinen Bewegungsgleichungen in Angriff nahm. Die beiden Formen aber, in denen diese Gleichungen jetzt gegeben werden, verdankt man *Euler*[36]).

7. **Kinematik der Flüssigkeiten**[37]). Die *Geschwindigkeit* einer sich bewegenden Flüssigkeit in einem Punkte ist ein Vektor (u, v, w), der durch die Eigenschaft definiert ist, dass die Integrale

$$\iiint \varrho u \, dx\, dy\, dz, \quad \iiint \varrho v \, dx\, dy\, dz, \quad \iiint \varrho w \, dx\, dy\, dz,$$

genommen über das Volumen irgend einer in der Flüssigkeit gezogenen Oberfläche, die Komponenten der Bewegungsgrösse[38]) für die in

33) *Lagrange*, Méc. an. 2, p. 243—249; vgl. *Rühlmann*, Hydromechanik, p. 187.

34) Principia, Lib. 2, Prop. 32—35.

35) Siehe *E. Mach*, Mechanik, p. 383.

36) Berlin, Hist. de l'Acad. 1755; Petersburg, Novi Comm. 14 (1770).

37) Die Kinematik der Flüssigkeitsbewegung wurde von *E. Beltrami* in einer Reihe von Abhandlungen in Bol. Mem. (3) 1, 2, 3, 5 (1871—1874) monographisch behandelt. Siehe auch *N. Joukowsky*, Mosk. math. Samml. 8 (1876).

38) *Maxwell*, Electricity and Magnetism 1, p. 11, 2. ed., Oxford 1881, definiert die Geschwindigkeit einer Flüssigkeit in einem Punkte mit Hülfe des „Flusses" durch eine Ebene, d. h. durch die Masse, die in der Zeiteinheit durch die Flächeneinheit einer durch den Punkt gehenden Ebene hindurchfliesst. Die

der Oberfläche eingeschlossene Flüssigkeit sind. Es kann daher (u, v, w) als die Geschwindigkeit des „Teilchens" angesehen werden, welches zur Zeit t sich in dem Punkte (x, y, z) befindet. Die Funktionen u, v, w sind der gewöhnlichen Annahme nach im allgemeinen stetige und differenzierbare Funktionen von x, y, z und t. Wenn sie von t unabhängig sind, heisst die Bewegung *stationär*.

Die Linien, die durch das System der Differentialgleichungen

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w} = dt$$

bestimmt sind, sind die *Bahnen der Teilchen*. Die Linien, welche durch die Gleichungen

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v} = \frac{dz}{w}$$

für irgend einen festgehaltenen Wert von t bestimmt werden, sind die *Stromlinien* zur Zeit t, sie fallen für eine stationäre Bewegung mit den Bahnen der Teilchen zusammen.

Das Flüssigkeitsvolumen, das in dem Zeitteilchen dt durch ein Oberflächenelement dS hindurchfliesst, ist $(lu + mv + nw)dS\,dt$, wo l, m, n die Richtungscosinus der Normalen für das Element sind. Die sogenannte *Kontinuitätsgleichung* drückt aus, dass der Zuwachs der Flüssigkeitsmasse in einer geschlossenen Oberfläche[13]) gleich dem Betrage ist, in welchem Masse von der Aussen- nach der Innenseite vermöge der durch die Oberfläche strömenden Flüssigkeit hinübergeschafft wird. Man erhält so die Gleichung[39])

$$\frac{\partial \varrho}{\partial t} + \frac{\partial(\varrho u)}{\partial x} + \frac{\partial(\varrho v)}{\partial y} + \frac{\partial(\varrho w)}{\partial z} = 0. \tag{1}$$

Die Bedingung, dass eine Grösse f, die mit der Flüssigkeit verbunden ist, zu allen Zeiten für dasselbe Teilchen denselben Wert hat, ist

$$\frac{\partial f}{\partial t} + u\frac{\partial f}{\partial x} + v\frac{\partial f}{\partial y} + w\frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{2}$$

Eine Funktion $f(x, y, z, t)$, welche dieser Bedingung genügt, definiert eine Schar von Flächen $f = \text{const.}$, welche sich so bewegen, dass sie stets von denselben Teilchen gebildet werden. Man wird nun bei der mathematischen Behandlung drei unabhängige Scharen solcher Flächen, die durch Gleichungen der Form

---

Definition, welche von der Bewegungsgrösse ausgeht, wurde ebenfalls von *Maxwell*, Lond. Phil. Trans. 157 (1867), vorgeschlagen; vgl. *O. Reynolds*, Lond. Phil. Trans. (A) 186 (1895).

39) *Euler*, Petersburg, Novi Comm. 14 (1770).

$$f_1(x, y, z, t) = P,$$
$$f_2(x, y, z, t) = Q,$$
$$f_3(x, y, z, t) = R$$

dargestellt werden können, zu Grunde legen[40]). Da die Werte von P, Q, R für ein Teilchen konstant bleiben, können sie als Koordinaten desselben benutzt werden[40]); zu diesen Koordinaten sind beispielsweise die Anfangskoordinaten x_0, y_0, z_0 der Teilchen zu zählen. Wenn man die Grössen P, Q, R, t als unabhängige Veränderliche an Stelle der x, y, z, t einführt, und die Differentiation in Bezug auf die neuen Veränderlichen mit dem Symbole δ bezeichnet, so bekommt man die Formel[41])

$$\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + u\frac{\partial}{\partial x} + v\frac{\partial}{\partial y} + w\frac{\partial}{\partial z}.$$

Die Kontinuitätsgleichung, in den neuen Veränderlichen ausgedrückt, nimmt die Form[42]) an

$$\frac{\delta}{\delta t}(\varrho J) = 0,$$

unter J die *Jacobi*'sche Determinante

$$\begin{vmatrix} \frac{\delta x}{\delta P} & \frac{\delta y}{\delta P} & \frac{\delta z}{\delta P} \\ \frac{\delta x}{\delta Q} & \frac{\delta y}{\delta Q} & \frac{\delta z}{\delta Q} \\ \frac{\delta x}{\delta R} & \frac{\delta y}{\delta R} & \frac{\delta z}{\delta R} \end{vmatrix}$$

verstanden.

Wenn für die Umgebung eines Teilchens die Dichte von der Zeit unabhängig ist, heisst die Flüssigkeit inkompressibel; wenn sie für alle Teilchen dieselbe ist, heisst die Flüssigkeit homogen. Die Kontinuitätsgleichung für eine inkompressible Flüssigkeit nimmt dann die Form an

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0,$$

oder

$$J = \text{const.}$$

Die Relativbewegung der Flüssigkeit[43]) nahe einem Punkte (x, y, z)

40) *M. J. M. Hill*, Quart. J. of math. 17 (1881).

41) *Basset*, Hydrodynamics, gebraucht für die hier mit $\frac{\delta}{\delta t}$ bezeichnete Operation $\frac{\partial}{\partial t}$, dagegen *Lamb*, Hydrodynamics, $\frac{D}{Dt}$. (In den deutschen Arbeiten wird fast durchgängig $\frac{d}{dt}$ geschrieben.)

42) Diese Gleichung wurde dem Wesen nach zuerst von *Euler* (Fussn. 39) gegeben.

43) *B. de Saint-Venant,* Paris C. R. 17 (1843), p. 1240; *Stokes*, Friction. Die entsprechende Theorie für die Deformation eines Kontinuums wurde von

wird durch die Geschwindigkeitskomponenten in einem benachbarten Punkte $(x+x', y+y', z+z')$ relativ zu dem Teilchen in x, y, z bestimmt. Diese Geschwindigkeitskomponenten sind in erster Annäherung

$$(3)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a}x' + \mathfrak{h}y' + \mathfrak{g}z' - \xi y' + \eta z' \\ \mathfrak{h}x' + \mathfrak{b}y' + \mathfrak{f}z' - \xi z' + \zeta x' \\ \mathfrak{g}x' + \mathfrak{f}y' + \mathfrak{c}z' - \eta x' + \xi y', \end{cases}$$

wo die Glieder von höherer Ordnung als der ersten vernachlässigt sind. Die Koeffizienten sind dabei durch folgende Gleichungen gegeben:

$$(4)\qquad \begin{cases} \mathfrak{a} = \dfrac{\partial u}{\partial x}, & \mathfrak{b} = \dfrac{\partial v}{\partial y}, & \mathfrak{c} = \dfrac{\partial w}{\partial z}, \\ 2\mathfrak{f} = \dfrac{\partial w}{\partial y} + \dfrac{\partial v}{\partial z}, & 2\mathfrak{g} = \dfrac{\partial u}{\partial z} + \dfrac{\partial w}{\partial x}, & 2\mathfrak{h} = \dfrac{\partial v}{\partial x} + \dfrac{\partial u}{\partial y}, \\ 2\xi = \dfrac{\partial w}{\partial y} - \dfrac{\partial v}{\partial z}, & 2\eta = \dfrac{\partial u}{\partial z} - \dfrac{\partial w}{\partial x}, & 2\zeta = \dfrac{\partial v}{\partial x} - \dfrac{\partial u}{\partial y}. \end{cases}$$

Diejenigen Glieder in (3), welche ξ, η, ζ enthalten, stellen eine Drehbewegung[44]) des kleinen Volumenelements dar; dasselbe rotiert wie ein starrer Körper mit der Winkelgeschwindigkeit (ξ, η, ζ). Der Vektor $(\xi\,\eta\,\zeta)$ soll die „Drehgeschwindigkeit" (spin[45]) heissen. Die Grösse $\xi^2 + \eta^2 + \zeta^2$ ist gegenüber orthogonaler Koordinatentransformation invariant. Sie ist das Quadrat der Drehgeschwindigkeit. Wenn ein kleines kugelförmiges Element der Flüssigkeit der Wirkung der übrigen Flüssigkeit entzogen und starr gemacht werden könnte, so würde es mit der Winkelgeschwindigkeit (ξ, η, ζ)[46]) rotieren.

Eine Flüssigkeitsbewegung, bei der ξ, η, ζ nicht verschwinden, heisst eine „Wirbelbewegung"; jeder Teil der Flüssigkeit, in welchem irgend eine der Grössen ξ, η, ζ von Null verschieden ist, heisst ein „Wirbel". Eine Bewegung, bei der ξ, η, ζ verschwinden, nennt man wirbelfrei; bei einer solchen Bewegung existiert eine Funktion φ, welche die Eigenschaft hat, dass

---

Cauchy, Exercices de mathématiques 2, Paris 1827, p. 60 gegeben. Siehe IV 14, Nr. **12—18**.

44) *Euler*, Berlin, Hist. de l'Acad., 1755, p. 292, gab an, dass bei einer Rotationsbewegung um eine Axe $u\,dx + v\,dy + w\,dz$ kein vollständiges Differential ist.

45) Der Name „Molekularrotation", der oft gebraucht wird, ist sehr schlecht gewählt. Die Theorie hat gar keine Beziehung zu den Molekülen. Der Name „spin" wurde von *W. K. Clifford*, Elements of Dynamic, London 1878, eingeführt. Berücksichtigt man die Verschiedenheit zwischen polaren und axialen Vektoren, so muss man den „spin" als axialen Vektor ansehen (IV 14). Der „spin" ist der halbe „curl" des Geschwindigkeitsvektors.

46) *Stokes*, Friction, s. Papers 1, p. 112.

$$u = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad w = \frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Hier bezeichnet man φ als das „Geschwindigkeitspotential“[47]).

Die übrigen Glieder in (3), welche $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ enthalten, drücken die Thatsache aus, dass das Volumenelement in einem kleinen Zeitintervall τ eine reine Deformation erleidet. Werden die Ausdehnungen und Gleitungen, die bei dieser Deformation vorkommen, mit ε_x, ε_y, ε_z, g_{yz}, g_{zx}, g_{xy} bezeichnet, so sind diese Grössen mit den Grössen $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ durch die Gleichungen

$$\mathfrak{a} = \lim_{\tau=0} \tau^{-1} \varepsilon_x, \qquad 2\mathfrak{f} = \lim_{\tau=0} \tau^{-1} g_{yz}$$
$$\cdots \qquad \cdots$$

verbunden. Das Tensortripel, welches $\mathfrak{a}$, $\mathfrak{b}$, $\mathfrak{c}$, $\mathfrak{f}$, $\mathfrak{g}$, $\mathfrak{h}$ als Komponenten hat, möge „Deformationsgeschwindigkeit“ (rate of strain) genannt werden. Die Grösse $\mathfrak{a} + \mathfrak{b} + \mathfrak{c}$ ist gegenüber orthogonalen Transformationen invariant; sie ist die „Geschwindigkeit der Dilatation“, die das Volumenelement erleidet, und möge durch Θ bezeichnet sein.

8. Bewegungsgleichungen[48]). Die Bewegungsgleichungen einer unter Einwirkung äusserer Kräfte sich bewegenden idealen Flüssigkeit drücken folgende Bedingung aus: Der in einer gegebenen Richtung erfolgende Zuwachs an Bewegungsgrösse, den eine in eine feste Oberfläche eingeschlossene Flüssigkeit erfährt, muss sich aus zwei anderen Bewegungsgrössen zusammensetzen. Die eine dieser Bewegungsgrössen wird in jener Richtung von der durch die Oberfläche hindurchströmenden Flüssigkeit mitgeführt, also von der Aussenseite nach der Innenseite oder umgekehrt transportiert (je nach dem Sinn des Geschwindigkeitsvektors). Die andere Bewegungsgrösse wird in jener Richtung durch die äusseren Kräfte und den auf die Oberfläche[49]) wirkenden Druck erzeugt. Übrigens kann die in Rede stehende Ober-

---

47) *Helmholtz*, Wirbelbewegung. In *Lamb*'s Hydrodynamics

$$-d\varphi = u\,dx + v\,dy + w\,dz.$$

Letztere Bezeichnung ist gewählt wegen der physikalischen Bedeutung von φ; vgl. IV 16, Nr. 1b.

48) Die im Text zu Grunde gelegte Methode, die Bewegungsgleichungen aus der Theorie der Bewegungsgrösse abzuleiten, wird jetzt allgemein angewandt, sie ist gleichbedeutend mit der von *Euler* gebrauchten (Fussn. 36). Die betreffenden Gleichungen wurden von *Lagrange*, Méc. an. 2, p. 250 aus dem Prinzip der kleinsten Wirkung abgeleitet; siehe auch *Basset*, Hydrodynamics 1, p. 32 und *Wien*, Hydrodynamik, p. 47.

49) Das hier gegebene Prinzip kann auf jedes kontinuierliche mechanische System angewandt werden, vorausgesetzt, dass der „Druck auf die Oberfläche“ durch die „über die Oberfläche verteilten Zugkräfte“ ersetzt wird.

fläche, was Lage und Gestalt anbelangt, beliebig in dem mit Flüssigkeit erfüllten Raume gewählt sein[13]). Die Gleichungen sind

$$(1)\quad \frac{\delta u}{\delta t} = X - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial x}, \quad \frac{\delta v}{\delta t} = Y - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial y}, \quad \frac{\delta w}{\delta t} = Z - \frac{1}{\varrho}\frac{\partial p}{\partial z},$$

in denen die Glieder linker Hand ersichtlich die Beschleunigungskomponenten des Teilchens repräsentieren, das sich zur Zeit t in dem Punkte (x, y, z) befindet. Die Gleichungen können auch in folgender Form geschrieben werden

$$(2)\quad \frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\cdot\frac{\delta x}{\delta P} + \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}\cdot\frac{\delta y}{\delta P} + \frac{\delta^2 z}{\delta t^2}\cdot\frac{\delta z}{\delta P} = X\frac{\delta x}{\delta P} + Y\frac{\delta y}{\delta P} + Z\frac{\delta z}{\delta P} - \frac{1}{\varrho}\frac{\delta p}{\delta P},$$

wobei das Symbol δ die Differentiation in bezug auf die unabhängigen Veränderlichen P, Q, R, t bedeutet.

Die Gleichungen (1) werden gewöhnlich als die *Euler*'schen Gleichungen, die Gleichungen (2) als die *Lagrange*'schen Gleichungen bezeichnet[50]).

Die spezielle Bedingung, die an den begrenzenden Oberflächen gilt, hat eine rein kinematische Bedeutung; sie sagt aus, dass dort in der Richtung der Normalen keine Relativgeschwindigkeit der Oberfläche und der mit ihr in Berührung sich befindenden Flüssigkeit stattfindet[51]); folglich ist die Gleichung jeder solchen Oberfläche von der Form $f(x, y, z, t) = 0$, wo f eine Lösung der Gleichung (2) in Nr. 7 ist. An einer *freien* Oberfläche gilt die weitere Bedingung, dass p verschwindet. An einer Oberfläche, entlang deren die Flüssigkeit mit einem zweiten Körper in Berührung ist, muss die Normalkomponente der Zugkraft für eine Ebene, die der Tangentialebene parallel ist und im kleinen Abstande von derselben im Innern des zweiten Körpers liegt, bei verschwindendem Abstande in die Grenze $-p$ übergehen[52]). Ist indess der zweite Körper eine Flüssigkeit, und die Oberflächen-

50) Beide Formen werden von *Lagrange*, Méc. an. 2 gebraucht. Die Gleichungen (1) wurden von *Euler* im Jahre 1755 und die Gleichungen (2) auch von *Euler* im Jahre 1770 (Fussn. 36) gegeben. Die Gleichungen (2) werden gewöhnlich in der Form geschrieben, die sich durch Ersetzung von P, Q, R durch die Anfangskoordinaten x_0, y_0, z_0 ergiebt.

51) Wegen einer Diskussion dieses Theorems, besonders im Hinblick auf freie Oberflächen, siehe Sir *W. Thomson*, Cambr. and Dubl. Math. J. 3 (1848), p. 89 = Math. and Phys. Papers 1, Cambr. 1882, p. 83. *Poisson*, Traité de Mécanique 2, p. 681, hatte bereits auf die Schwierigkeiten des Theorems aufmerksam gemacht.

52) Dies ist die Bedingung für die „Stetigkeit der Spannung".

spannung zwischen den beiden Flüssigkeiten T,[53]) so ist der Druck an der Oberfläche unstetig, indem er sich um einen Betrag $T(R^{-1} + R'^{-1})$ ändert, unter R und R' die Hauptkrümmungsradien der Oberfläche verstanden.

9. Flüssigkeit, die wie ein starrer Körper rotiert. Wenn die äusseren Kräfte konservativ sind und die Flüssigkeit mit der gleichförmigen Winkelgeschwindigkeit ω um die Axe z rotiert, so haben die Bewegungsgleichungen ein Integral[54])

$$V - \int \frac{dp}{\varrho} + \frac{1}{2}\omega^2(x^2 + y^2) = \text{const.}$$

Für eine inkompressible Flüssigkeit, die unter Einwirkung der Schwere um eine vertikale Axe rotiert, sind die Oberflächen gleichen Druckes Rotationsparaboloide um die Axe; ihre Halbparameter haben die Länge $g\omega^{-2}$ und der Druck in einem Punkte ist das Produkt von $g\varrho$ in die Tiefe unter der freien Oberfläche[55]). Für eine der eigenen Schwere unterworfene inkompressible Flüssigkeit, deren freie Oberfläche die Form eines Ellipsoids, $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$, besitzt, hat das Potential V in einem innern Punkte die Form[56])

$$V = \text{const.} - \frac{1}{2}(Ax^2 + By^2 + Cz^2);$$

die Gestalt des Ellipsoids und die entsprechende Winkelgeschwindigkeit sind dabei mit den A, B, C durch die Gleichungen[57])

$$\omega^2 = \frac{Aa^2 - Cc^2}{a^2} = \frac{Bb^2 - Cc^2}{b^2} \tag{1}$$

verknüpft. Somit ist jedes Ellipsoid, welches der Gleichung

$$(A - B)a^2b^2 + Cc^2(a^2 - b^2) = 0 \tag{2}$$

genügt, eine mögliche Gleichgewichtsfigur einer rotierenden, der eigenen Schwere unterworfenen Flüssigkeit; man nennt diese Ellipsoide die „*Jacobi*'schen Ellipsoide". Die Axe c muss dabei die kleinste

53) Siehe den Artikel über Kapillarität in Bd. V.

54) *Euler* (Fussn. 44).

55) *D. Bernoulli,* Hydrodynamica, p. 246. Die Konkavität der freien Oberfläche wird erwähnt von *Newton*, Principia, Scholium zu Definitio 8.

56) II A 7b, Nr. **15**.

57) Dies Resultat verdankt man *Jacobi*, Ann. Phys. Chem. 33 (1834) = Ges. Werke 2, Berlin 1882, p. 19; siehe auch *J. Liouville,* J. éc. pol. 14 (1834) und *Thomson* and *Tait,* Nat. Phil. 2, p. 330. Die Bewegung wurde im Detail diskutiert von *C. O. Meyer*, J. f. Math. 24 (1842), *J. Liouville*, J. de math. 16 (1851) und *G. H. Darwin*, Lond. Roy. Soc. Proc. 41 (1886).

Axe sein. Wenn $a = b$ ist, so wird das Ellipsoid ein Sphäroid und die Winkelgeschwindigkeit ist mit der Gestalt durch die Gleichung [58])

$$\omega^2 f^3 = 2\pi G\varrho\,\{(3+f^2)\operatorname{arc\,tang} f - 3f\} \tag{3}$$

verbunden, wo $f^2 = a^2c^{-2} - 1$ und G die Gravitationskonstante ist. Jedes abgeplattete Sphäroid ist eine mögliche Gleichgewichtsfigur der rotierenden Flüssigkeit; wenn es nahezu kugelförmig ist, wird

$$15a\omega^2 = 16\pi G\varrho(a-c).$$

Jedem Werte von $\omega^2(2\pi G\varrho)^{-1}$, der den Wert 0,2247 nicht überschreitet, entsprechen zwei Werte von f; für grössere Werte dieser Grösse hat die Gleichung (3) keine reellen Wurzeln. Die durch die Gleichung (3) bestimmte Gleichgewichtsfigur wird als das „*Maclaurin*'sche Sphäroid" bezeichnet.

10. Die Druckgleichung. Ausfluss von Flüssigkeiten [59]). Die Bewegungsgleichungen haben des weiteren ein angebbares Integral, wenn die äusseren Kräfte konservativ sind und die Bewegung wirbelfrei ist. Der Druck ist dann nämlich durch die Gleichung

$$V - \int \frac{dp}{\varrho} - \frac{\partial\varphi}{\partial t} - \frac{1}{2}q^2 = F(t) \tag{1}$$

gegeben, wo $F(t)$ eine willkürliche Funktion der Zeit und q die resultierende Geschwindigkeit bezeichnet. Für eine inkompressible Flüssigkeit, die sich unter dem Einfluss der Schwere stationär bewegt, wird die Gleichung

$$p - g\varrho z + \frac{1}{2}\varrho q^2 = \text{const.},$$

wobei die z-Axe vertikal nach unten angenommen ist; dieses Resultat enthält das *Torricelli*'sche Theorem. Bei stationärer Bewegung unter Einwirkung konservativer Kräfte gilt allgemein die Gleichung

$$V - \int \frac{dp}{\varrho} - \frac{1}{2}q^2 = \text{const.}$$

entlang jeder Stromlinie, wobei die Konstante rechts für verschiedene Stromlinien verschieden ist, wenn Wirbelbewegung vorliegt.

58) Dieses Resultat verdankt man *Maclaurin*; siehe *Thomson* and *Tait*, Nat. Phil. 2, p. 326. Die Bewegung wurde im Detail von *Laplace*, Mécanique céleste 2, Paris 1799, diskutiert. Wegen der Anwendung der Theorie auf die Gestalt der Erde siehe Bd. VI. Weitere Resultate betreffend Flüssigkeitsellipsoide werden in IV 16, Nr. 4 gegeben.

59) *Lamb*, Hydrodynamics, p. 21—29. Wegen des Ausflusses aus Öffnungen siehe auch IV 17.

Bei den Experimenten über den Ausfluss von inkompressiblen Flüssigkeiten wird die mittlere Geschwindigkeit, genommen über einen durch den ausströmenden Strahl hindurchgeführten Schnitt, gemessen. Das *Torricelli*'sche Theorem wird dann nahezu bestätigt, sofern der gewählte Schnitt der Schnitt des kleinsten Flächeninhaltes ist, den man als die *vena contracta* bezeichnet. Es wurde von *J. C. Borda*[60]) gezeigt, dass wenn hierbei der Druck für alle Punkte der Öffnung gleich dem Gleichgewichtsdruck angenommen wird, der Flächeninhalt der *vena contracta* gleich dem halben Flächeninhalt der Öffnung sein muss; aber da der Druck über die Öffnung hin jedenfalls ein wenig kleiner als der Gleichgewichtsdruck ist, so ist das Verhältnis ein wenig grösser als $\frac{1}{2}$. Das in Rede stehende Verhältniss k heisst „Kontraktionskoeffizient"; die Erfahrung zeigt, dass k von der Form der Ansatzröhre abhängt. Bei einer Druckhöhe h über dem Schwerpunkte der Mündung ist die Ausflussgeschwindigkeit $\alpha\sqrt{(2gh)}$; der Koeffizient α heisst „Ausflusskoeffizient". Für eine einfache Öffnung in einer ebenen Wand sind k und α nahezu 0,64 und 0,62;[61]) wenn eine kleine Röhre in die Flüssigkeit hineinragt, ist k fast genau $\frac{1}{2}$.

Man kann die Formel (1) auch auf ein Gas anwenden, das aus einem Gefäss[62]), in welchem der Druck p_0 und die Dichte ϱ_0 herrscht, in einen Raum, in welchem der Druck p_1 ist, ausströmt. Es ist dann die Masse, welche in der Zeiteinheit über die Flächeneinheit der *vena contracta* hinüberfliesst,

$$\left(\frac{2}{\gamma-1}\right)^{\frac{1}{2}} c_0\varrho_0\left\{\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{2}{\gamma}}-\left(\frac{p_1}{p_0}\right)^{\frac{\gamma+1}{\gamma}}\right\}^{\frac{1}{2}},$$

wo c_0 die Schallgeschwindigkeit in dem Gase von der Dichte ϱ_0 ist. Dieses Resultat gilt nur, wenn

$$\frac{p_1}{p_0} > \left\{\frac{2}{\gamma+1}\right\}^{\frac{\gamma}{\gamma-1}}.$$

Ist dies nicht der Fall, so wird die Geschwindigkeit an einer geeigneten Stelle nahe der Öffnung gleich der Schallgeschwindigkeit, die

60) Paris, Hist. de l'Acad. 1766. Das Resultat wurde wieder entdeckt von *G. O. Hanlon* und weiter beleuchtet von *Maxwell,* Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1869). Wegen der theoretischen Bestimmung der Kontraktionskoeffizienten siehe IV 16, Nr. 1 f.

61) Vgl. z. B. *J. H. Cotterill,* Applied Mechanics, 4. ed., London 1895, sowie *Rühlmann,* Hydromechanik.

62) *Lamb*, Hydrodynamics, p. 28, wo die von *B. de Saint-Venant* und *L. Wantzel*, *Hugoniot* und *O. Reynolds* erhaltenen Resultate abgekürzt zusammengestellt sind.

der Dichte des Gases an dieser Stelle entspricht. Der Schnitt durch den Strahl an dieser Stelle wird der engste Schnitt und die Ausflussgeschwindigkeit ist

$$\left\{\frac{2}{\gamma+1}\right\}^{\frac{1}{2}} c_0.$$

11. Erhaltung der Energie. Sei S irgend eine fest gehaltene geschlossene Oberfläche in einem mit Flüssigkeit erfüllten Raume; die Energieänderung der in S befindlichen Flüssigkeitsmenge wird durch die Gleichung[63])

$$\frac{\partial}{\partial t}\iiint \tfrac{1}{2}\varrho q^2\,dx\,dy\,dz = \iint \tfrac{1}{2}\varrho q^2(lu+mv+nw)\,dS$$
$$+\iint p(lu+mv+nw)\,dS + \iiint \varrho(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint p\Theta\,dx\,dy\,dz$$

bestimmt, wo l, m, n die Richtungscosinus der innern Normale von S sind. Der letzte Ausdruck, multipliziert mit dt, repräsentiert die infolge der Ausdehnung der Flüssigkeit eintretende Arbeitsleistung des innern Druckes während des Zeitteilchens dt. Wenn p eine einwertige Funktion von ϱ ist, giebt dieser Ausdruck den Betrag, um welchen sich die potentielle Energie der Kompression während desselben Zeitteilchens vermindert. Sind die äusseren Kräfte konservativ, so findet keinerlei Dissipation der Energie statt.

Der Satz, dass eine wirbelfreie Bewegung wirbelfrei bleibt, das Theorem, dass die Wirbel stets von denselben Teilchen gebildet werden, die Fortpflanzung der Wellen von ungeänderter Gestalt ohne Höhenabnahme, und das Ergebniss, dass der Widerstand einer idealen Flüssigkeit gegen einen durch sie hin bewegten Körper einer blossen Abänderung der Trägheit des Körpers gleichkommt, alle diese fundamentalen Thatsachen sind eng mit dem Nichteintreten einer Dissipation der Energie bei der Bewegung der idealen Flüssigkeit verbunden[64]).

12. Der Begriff der Flüssigkeitsreibung. Die Idee, dass die Flüssigkeitsbewegungen an andern Körpern vorbei, mit denen die Flüssigkeiten in Berührung sind, durch Wirkungen von der Natur der Reibung gehemmt werden, entstand aus folgenden Beobachtungen: 1) dass die Geschwindigkeit eines Strahles, der ein Gefäss verlässt,

63) *Lamb*, Hydrodynamics, p. 11.

64) Vgl. hierüber das Nähere in IV 16.

etwas kleiner ausfällt, als sie durch das *Torricelli*'sche Theorem gegeben wird; 2) dass die Geschwindigkeit von Wasser, welches in einer geneigten Röhre oder in einem Kanal herabfliesst, in verschiedenen Querschnitten nahezu dieselbe ist. Im ersten Falle wurde der Verlust an Geschwindigkeit dem Widerstande der Luft[65]) zugeschrieben; in dem zweiten Falle nahm man an, dass der beschleunigenden Wirkung der Schwere durch die Reibung an der Oberfläche der Röhre oder dem Bette des Kanals das Gleichgewicht gehalten würde[66]). *Newton* benutzte in seiner Theorie der Zirkulation der inkompressiblen Flüssigkeiten den Begriff eines innern Widerstandes zwischen Flüssigkeitsschichten, die an einander vorbei gleiten, und nahm an, dass dieser Widerstand mit der relativen Geschwindigkeit proportional ist[67]). Die ersten Versuche, beide Arten der Reibung sowohl in die Differentialgleichungen der Bewegung, welche in den Punkten des Flüssigkeitsinnern statthaben, als auch in die speziellen Bedingungen, welche an den Grenzen gelten, einzuführen, wurden von *Navier*[68]) und *Poisson*[69]) gemacht. Ihre Gleichungen waren auf Betrachtungen über intermolekulare Wirkungen von demselben Charakter gegründet, wie sie sie zum Aufbau der Theorien für das Gleichgewicht elastischer Körper benutzt hatten[70]). Es wurde von *B. de Saint-Venant*[43]) angegeben, dass dieselben Gleichungen, jedenfalls für inkompressible Flüssigkeiten, ohne Betrachtung der intermolekularen Wirkungen dadurch erhalten werden können, dass man in einer präziseren Form die von *Newton* eingeführte Hypothese wieder aufnimmt. Nach dieser Ansicht wird die relative Geschwindigkeit des Gleitens für die beiden Richtungen y und z durch

---

65) *E. Mach*, Mechanik, p. 378. Der im Text erwähnte Verlust an Geschwindigkeit bringt die Verschiedenheit zwischen dem Ausflusskoeffizienten und dem Kontraktionskoeffizienten mit sich (s. Nr. **10**).

66) *Bossut*, Traité théorique et expérimentale d'Hydrodynamique, Paris 1786, drückte diese Idee klar aus. Sie wurde aber bereits von *d'Alembert*, Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides, Paris 1770 angedeutet und weniger scharf in seinem Essai . . . de la résistance des fluides, Paris 1752. Das Geschichtliche ist in *Rühlmann*, Hydromechanik, ausführlich zusammengestellt. *Stokes*, Friction = Papers 1, p. 76, macht auf die Schwierigkeiten aufmerksam, welche sich bei dem Versuche einer rationellen Theorie des Strömens von Wasser in einem geneigten Kanal einstellen.

67) Principia, Lib. 2, Sect. 9. „Hypothesis. Resistentiam, quae oritur ex defectu lubricitatis partium fluidi, caeteris paribus, proportionalem esse velocitati, qua partes fluidi separantur ab invicem."

68) Paris, Mém. de l'Acad. 6 (1827).

69) J. éc. pol. 13 (1831).

70) IV 21.

die Grösse $2\mathfrak{f}$ ausgedrückt[71]), und die Hypothese ist dann die, dass die Spannung in einem Punkte einer Flüssigkeit aus zwei zusammengesetzen Spannungen besteht: 1) aus dem gleichförmigen Drucke p und 2) aus einer hinzutretenden Spannung folgender Art. Die Summe der Normalspannungen auf je drei zu einander rechtwinkelig stehende Ebenen verschwindet; die Tangentialkomponente der Spannung, auf irgend eine Ebene, die als $z = \text{const.}$ genommen werden mag, in irgend einer Richtung — es sei die y-Richtung — ist gleich dem Produkte der entsprechenden relativen Geschwindigkeit des Gleitens, also $2\mathfrak{f}$, in einen Koeffizienten μ. Aus dieser Hypothese folgt, dass die sechs Spannungskomponenten durch folgende Formeln

$$(1)\qquad \begin{cases} p_{xx} = -p - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\mathfrak{a}, & p_{yz} = p_{zy} = 2\mu\mathfrak{f}, \\ p_{yy} = -p - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\mathfrak{b}, & p_{zx} = p_{xz} = 2\mu\mathfrak{g}, \\ p_{zz} = -p - \frac{2}{3}\mu\Theta + 2\mu\mathfrak{c}, & p_{xy} = p_{yx} = 2\mu\mathfrak{h} \end{cases}$$

gegeben sind. Der Koeffizient μ wird der *Reibungskoeffizient* genannt. Die Grösse $p_{xx} + p_{yy} + p_{zz}$ ist invariant gegenüber orthogonaler Koordinatentransformation[72]), ihr Wert ist $-3p$. *Stokes*[73]) zeigte, dass man auf dieselben Resultate auch bei der Annahme kommt, dass in dem zusätzlichen Spannungssystem die sechs Spannungskomponenten lineare Funktionen der Grössen $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{f}, \mathfrak{g}, \mathfrak{h}$ seien. Er bemerkte in dieser Hinsicht zunächst, dass, da Flüssigkeitsbewegungen, bei denen sich die Flüssigkeit wie ein starrer Körper bewegt, keine innere Reibung hervorrufen können, die fragliche Spannung von den übrigen

71) Der Beweis ruht darauf, dass 1) nach der *Newton*'schen Hypothese die Abhängigkeit der Geschwindigkeitskomponente v von der Koordinate z eine auf die Ebene $z = \text{const.}$ wirkende tangentiale Spannung parallel der Axe y von dem Betrage $\mu \frac{\partial v}{\partial z}$ hervorruft, d. h. dass p_{yz} ein Glied $\mu \frac{\partial v}{\partial z}$ enthält, dass 2) nach einem allgemeinen Theorem über die Spannung dieses eine gleiche auf die Ebene $y = \text{const.}$ wirkende tangentiale Spannung parallel der z-Axe in sich schliesst. Nach Symmetrie muss dann die Spannungskomponente p_{yz} das Glied $\mu \frac{\partial w}{\partial y}$ enthalten.

72) *Basset*, Hydrodynamics 2, p. 238. Vgl. IV 14, Nr. **14**.

73) *Stokes*, Friction. Siehe auch *Stokes*, Report. Die Sachen sind etwas anders von *W. Voigt*, Kompendium d. theoret. Physik **1**, Leipzig 1895, geordnet, indem er zwei Reibungskoeffizienten benutzt; es kommt dies auf eine andere Definition des Druckes p hinaus. Wegen der Diskussionen, zu denen die von *B. Saint-Venant* und *Stokes* vorgeschlagenen Bewegungsgleichungen Anlass gaben, siehe *Hicks*, Report (1881).

Komponenten der Relativbewegung allein und nicht von der Drehgeschwindigkeit abhängen kann. Er brachte sodann Molekularbetrachtungen heran, um die Linearität dieser Beziehungen zwischen den zusätzlichen Spannungskomponenten und den Komponenten der Deformationsgeschwindigkeit zu stützen. Der überzeugendste Beweis zu Gunsten der angenommenen linearen Beziehung liegt ohne Zweifel in der engen Übereinstimmung zwischen Resultaten, die aus ihr und exakten Beobachtungen abgeleitet sind[74]).

13. Bewegungsgleichungen für zähe Flüssigkeiten. Man bezeichne die Flüssigkeit auf einer Seite (der ersten Seite) einer Oberfläche mit F_1 und die Flüssigkeit oder einen andern Körper auf der andern Seite (der zweiten Seite) der Oberfläche mit F_2; dann kann die Wirkung von F_1 auf F_2 als aus unendlich kleinen Zugkräften auf die Elemente dS der Oberfläche zusammengesetzt angesehen werden; die Komponenten der letzteren parallel zu den Axen sind

$$(1) \qquad \begin{gathered}(lp_{xx} + mp_{xy} + np_{xz})dS, \quad (lp_{xy} + mp_{yy} + np_{zy})dS, \\ (lp_{zx} + mp_{zy} + np_{zz})dS,\end{gathered}$$

wo l, m, n die Richtungscosinus der auf dS errichteten Normalen sind, die von der zweiten Seite nach der ersten Seite gezogen wird. Der durch die Bewegungsgleichungen auszudrückende Gedanke ist bereits in Nr. 8 angegeben. Die Gleichungen nehmen jetzt folgende Form an:

$$(2) \qquad \varrho \frac{\delta u}{\delta t} = \varrho X + \frac{\partial p_{xx}}{\partial x} + \frac{\partial p_{xy}}{\partial y} + \frac{\partial p_{xz}}{\partial z};$$

setzen wir hier die Werte der $p_{xx}\ldots$ von Nr. **12** ein, so erhalten wir[75])

$$(3) \qquad \begin{cases} \dfrac{\delta u}{\delta t} = X - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial x} + \dfrac{1}{3}\nu\dfrac{\partial \Theta}{\partial x} + \nu\Delta u, \\ \dfrac{\delta v}{\delta t} = Y - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial y} + \dfrac{1}{3}\nu\dfrac{\partial \Theta}{\partial y} + \nu\Delta v, \\ \dfrac{\delta w}{\delta t} = Z - \dfrac{1}{\varrho}\dfrac{\partial p}{\partial z} + \dfrac{1}{3}\nu\dfrac{\partial \Theta}{\partial z} + \nu\Delta w, \end{cases}$$

74) Besonders bei den Experimenten von *J. L. M. Poiseuille*, Paris, Mém. div. sav. 19 (1846), über das Strömen von Flüssigkeiten durch Kapillarröhren, und bei den Experimenten, die von *Stokes*, Pendulums, diskutiert werden. Die letzteren können als entscheidender Beweis für die Richtigkeit der Bewegungsgleichungen bei kleinen Geschwindigkeiten angesehen werden. Die ersteren ermöglichen es, einen viel grösseren Bereich von Änderungen der Geschwindigkeit in Betracht zu ziehen, siehe *O. Reynolds*, Lond. Phil. Trans. 177 (1886), p. 165.

75) *B. de Saint-Venant* (Fussn. 43); *Stokes*, Friction.

wo ν für $\frac{\mu}{\varrho}$ geschrieben ist. Die Grösse ν heisst der *kinematische Reibungskoeffizient*[76]). Wenn die Geschwindigkeit genügend klein ist, können angenäherte Bewegungsgleichungen dadurch erhalten werden, dass man $\frac{\delta}{\delta t}$ durch $\frac{\partial}{\partial t}$ ersetzt; die so erhaltenen Gleichungen heissen die Gleichungen der „langsamen" Bewegung.

An der Grenze der Flüssigkeit muss die durch Gleichung (2) Nr. 7 ausgedrückte kinematische Bedingung erfüllt sein. An der freien Oberfläche existiert ausserdem die spezielle Bedingung, dass die durch (1) gegebenen Zugkräfte für alle Elemente der Oberfläche verschwinden müssen. An einer Oberfläche, die zwei Flüssigkeiten trennt, sind die speziellen Bedingungen die, dass die drei Geschwindigkeitskomponenten und die drei Komponenten der Zugkraft sich beim Überschreiten der Oberfläche stetig aneinander schliessen. Entlang der Berührungsfläche der Flüssigkeit mit einem festen Körper ist die Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen jeweils dieselbe, wie die Geschwindigkeit des angrenzenden Teilchens des festen Körpers[77]). Die Richtigkeit dieser Bedingung scheint durch das unzweifelhafte Ergebnis der Experimente bestätigt zu werden. Eine andere Bedingung[78]), welche sich zunächst darbot, war die, dass einer endlichen Tangentialgeschwindigkeit möglicherweise ein proportionaler Widerstand entgegenwirke. Diese führte zu der Formel

$$\begin{aligned}(4)\qquad & l'(lp_{xx}+mp_{xy}+np_{xz})+m'(lp_{yx}+mp_{yy}+np_{yz})\\ & \quad +n'(lp_{zx}+mp_{zy}+np_{zz})\\ & =-\beta\{l'(u-u')+m'(v-v')+n'(w-w')\},\end{aligned}$$

wo l', m', n' die Richtungscosinus einer beliebigen geraden Linie sind, die in der Tangentialebene der Oberfläche durch den in Betracht kommenden Punkte gezogen ist. Die Geschwindigkeit des festen Körpers an dieser Stelle ist u', v', w' (β ist ein Reibungskoeffizient).

76) Der Wert von μ für Wasser bei 0^0 ist 0,0178; er nimmt bei steigender Temperatur ab; siehe *Helmholtz* (Fussn. 92). Der Wert von μ für Luft bei Atmosphärendruck und 0^0 ist 0,00017; er ist nahezu unabhängig vom Druck und wächst langsam bei steigender Temperatur; siehe *Maxwell* (Fussn. 102). Wegen der Beobachtungsmethoden und experimentellen Resultate siehe *L. Graetz*, Reibung, in *A. Winkelmann*'s Handbuch der Physik, Breslau 1891. Der Umstand, dass bei gewöhnlichen Flüssigkeiten μ klein ist, ist für viele Untersuchungen wichtig.

77) Diese Bedingung wurde versuchsweise von *Stokes*, Friction, eingeführt. Sie wurde als Resultat des direkten Experiments von *J. Boussinesq*, Eaux courantes, zu Grunde gelegt; in der That wird sie beispielsweise durch die Experimente von *Poiseuille* (Fussn. 74) bestätigt, siehe *Lamb*, Hydrodynamics, p. 521.

78) In den Abhandlungen von *Navier* und *Poisson* (Fussn. 68, 69).

14. Dissipation der Energie. Alle Bewegungen einer zähen Flüssigkeit, mit alleiniger Ausnahme der gleichförmigen Ausdehnung und der bei einem starren Körper möglichen Bewegungen, geben zu Dissipation der Energie Anlass[79]). Sei S irgend eine festgehaltene Oberfläche in einem mit Flüssigkeit erfüllten Raume; die Gleichung, welche die Energieänderungen der Flüssigkeitsmenge, die in S sich befindet, beherrscht, ist

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial t}\iiint \tfrac{1}{2}\varrho q^2\,dx\,dy\,dz = \iint \tfrac{1}{2}\varrho q^2(lu+mv+nw)\,dS$$
$$-\iint\{u(lp_{xx}+mp_{xy}+np_{xz})+v(lp_{yx}+mp_{yy}+np_{yz})$$
$$+w(lp_{zx}+mp_{zy}+np_{zz})\}\,dS$$
$$+\iiint\varrho(Xu+Yv+Zw)\,dx\,dy\,dz$$
$$+\iiint p\Theta\,dx\,dy\,dz-\iiint 2F\,dx\,dy\,dz,$$

wo l, m, n dieselbe Bedeutung wie in Nr. **11** haben, und

$$F=-\tfrac{1}{3}\mu\Theta^2+\mu(\mathfrak{a}^2+\mathfrak{b}^2+\mathfrak{c}^2+2\mathfrak{f}^2+2\mathfrak{g}^2+2\mathfrak{h}^2).$$

Der letzte Ausdruck rechter Hand in der Gleichung (1) multipliziert mit dt repräsentiert den Betrag des Energieverbrauchs während des Zeitteilchens dt; die Funktion F heisst die *Dissipationsfunktion*[80]). Die Gleichungen (1) in Nr. **12** können daher auch in folgender Form geschrieben werden

$$p+p_{xx}=\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{a}},\ \cdots\qquad 2p_{yz}=\frac{\partial F}{\partial\mathfrak{f}},\ \cdots$$

Formt man die Variation des Integrals $\iiint -F\,dx\,dy\,dz$ durch die Methode der Variationsrechnung in ein Oberflächen- und ein Raumintegral um, so wird der Koeffizient von δu in dem Raumintegral $\frac{1}{3}\mu\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\Delta u$, und dies ist derselbe Koeffizient, den δu in dem Raumintegral erhält, das durch Umformung der Variation des Integrals

79) *Stokes*, Pendulums, p. 58.

80) Eingeführt von Lord *Rayleigh* (Hon. *J. W. Strutt*), Lond. Math. Soc. Proc. 4 (1873), p. 357 = Scientific Papers 1, Cambr. 1899, p. 176. Über die Frage, ob die dissipierte Energie in Wärme verwandelt wird, siehe *O. Reynolds*, (Fussn. 38).

81) *D. Bobylew*, Math. Ann. 6 (1873); *A. R. Forsyth*, Mess. of math. (2) 9 (1880).

$$\iiint -\left\{\frac{2}{3}\mu\Theta^2 + 2\mu(\xi^2+\eta^2+\zeta^2)\right\} dx\,dy\,dz$$ [81])

entsteht. Dies Resultat kann zur Transformation der Bewegungsgleichungen in krummlinige Koordinaten benutzt werden[82]). Wenn eine inkompressible Flüssigkeit sich stationär unter Einwirkung von konservativen Kräften bewegt, sind die Gleichungen der „langsamen Bewegung" einfach die Bedingung dafür, dass die erste Variation des Integrals $\iiint F\,dx\,dy\,dz$, genommen über das von der Flüssigkeit erfüllte Volumen, verschwindet, und es folgt zugleich, dass die Bewegung durch die Randbedingungen eindeutig bestimmt ist[83]). Ferner nimmt bei einer „langsamen Bewegung" der inkompressiblen Flüssigkeit, die sich unter Einwirkung konservativer Kräfte bewegt und bei der die Geschwindigkeiten an den Grenzen gegeben sind, die Schnelligkeit der Dissipation der Energie immerzu ab. Es strebt so die Bewegung auf einen bestimmten Zustand, den Zustand einer gewissen stationären Bewegung, als Grenze hin; dieser Zustand ist dann stabil[84]). In einer inkompressiblen Flüssigkeit, die in einem festen, geschlossenen Gefäss sich befindet und unter Einwirkung von konservativen Kräften steht, ist eine stationäre Bewegung, ob langsam oder nicht, unmöglich[85]).

15. Folgerungen aus den Bewegungsgleichungen. Die Wirkung selbst eines geringen Grades von Zähigkeit macht sich stark bemerkbar. Den Bewegungsgleichungen einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit genügen allerdings die Geschwindigkeiten, welche einer wirbelfreien Bewegung einer idealen Flüssigkeit entsprechen, aber solche Bewegungen schliessen gewöhnlich ein Gleiten an den Begrenzungen ein, und dann sind sie im vorliegenden Falle nicht möglich. Bei jeder Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit, die unter Einwirkung konservativer Kräfte erfolgt, genügen die Komponenten der Drehgeschwindigkeit drei Gleichungen[86]) der folgenden Art

$$\frac{\delta\xi}{\delta t} = \xi\frac{\partial u}{\partial x} + \eta\frac{\partial u}{\partial y} + \zeta\frac{\partial u}{\partial z} + \nu\Delta\xi,$$

so dass sich die Wirbelbewegung etwa nach Art der Wärmeleitung

82) Siehe IV 14, Nr. **20** c.

83) *Helmholtz*, Heidelberg, nat.-med. Verh. (5) 1868 = Wiss. Abh. 1, p. 224.

84) *D. J. Korteweg*, Phil. Mag. (5) 16 (1883); das Theorem wurde auf dissipative Systeme im allgemeinen von Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 36 (1893), p. 354 ausgedehnt.

85) *M. Margules*, Wien Ber. 84 (1881).

86) *H. Lamb*, Motion of fluids, p. 243.

durch die Flüssigkeit hin ausbreitet[87]). Wenn zu Anfang eine im Innern der Flüssigkeit wirbelfreie Bewegung erregt worden wäre, würde sich Wirbelbewegung von den Grenzen aus nach innen fortpflanzen. Es sind Methoden für die Erzeugung von Wirbelbewegung in wirklichen Flüssigkeiten angegeben worden, welche zu einem experimentellen Studium solcher Bewegungen führen[88]).

Der Widerstand, den eine zähe Flüssigkeit der Bewegung eines festen Körpers entgegensetzt, ist nur in wenigen speziellen Fällen berechnet worden. Wenn sich eine Kugel langsam und stationär in einer unendlich ausgedehnten, inkompressiblen Flüssigkeit bewegt[89]), wird die Bewegung der Flüssigkeit durch eine axiale Stromfunktion[90])

$$\psi = \frac{1}{4} U a^2 \left(\frac{3r}{a} - \frac{a}{r}\right) \sin^2\theta,$$

gegeben, wo a der Radius der Kugel ist, U ihre Geschwindigkeit und r und θ die Polarkoordinaten eines Punktes in der Flüssigkeit, bezogen auf den Kugelmittelpunkt als Anfangspunkt und die Bewegungsrichtung der Kugel als Polaraxe. Der Widerstand ist dabei eine Kraft von der Grösse $6\pi\mu a U$. Wenn die Kugel kleine Pendelschwingungen[91]) von der Periode $\frac{2\pi}{\sigma}$ auf einer geraden Linie ausführt, so ist der Widerstand

$$\frac{1}{2} m \left\{\left(1 + \frac{9\sqrt{\nu}}{a\sqrt{2\sigma}}\right)\frac{dU}{dt} + \frac{9\sqrt{\nu\sigma}}{a\sqrt{2}}\left(1 + \frac{\sqrt{2\nu}}{a\sqrt{\sigma}}\right) U\right\},$$

unter m die Masse der verdrängten Flüssigkeit verstanden. Dies Resultat giebt für den Fall einer in einer zähen Flüssigkeit schwingenden Pendelkugel sowohl die Korrektion für die effektive Trägheit, als auch die Dämpfung der Schwingungen. Wenn eine Hohlkugel von dem innern Radius a, welche eine zähe inkompressible Flüssigkeit einschliesst, kleine Drehschwingungen[92]) von der Periode $\frac{2\pi}{\sigma}$ zu machen gezwungen ist, so rotiert die Flüssigkeit auf der konzen-

87) Für die Ausbreitung der Geschwindigkeit von einer Begrenzung aus siehe IV 16, Nr. 6b.

88) Siehe IV 16, Fussn. 117.

89) *Stokes*, Pendulums, p. 48—51, wo die Resultate auf die Bewegung einer Kugel in Luft angewandt werden; vgl. *H. S. Allen*, Phil. Mag. (5) 50 (1900). Siehe auch *Lamb*, Hydrodynamics, p. 531.

90) IV 14, Nr. 7 und IV 16, Nr. 1g.

91) *Stokes*, Pendulums, p. 23—25; *O. E. Meyer*, J. f. Math. 73 (1871); *Lamb*, Hydrodynamics, p. 568; *O. E. Meyer*, J. f. Math. 75 (1873), trägt der Kompressibilität der Luft Rechnung.

92) *Helmholtz* und *G. v. Piotrowski*, Wien Ber. 40 (1860) = *Helmholtz*, Wiss. Abh. 1, p. 172; *Lamb*, Hydrodynamics, p. 563.

trischen Kugelfläche vom Radius r mit der Winkelgeschwindigkeit $\omega\psi_1(hr)/\psi_1(ha)$, wo ω die Winkelgeschwindigkeit der Hohlkugel zu irgend einer Zeit, $h^2 = i\sigma/\nu$ und $\psi_k(x) = \left(\frac{-1}{x}\frac{d}{dx}\right)^k \frac{\sin x}{x}$ ist. Der Widerstand wird durch ein Kräftepaar von der Grösse

$$2m\nu\omega h^2 a^2 \psi_2(ha)/\psi_1(ha)$$

gegeben, unter m die Masse der eingeschlossenen Flüssigkeit verstanden. Das Problem wird nur wenig komplizierter, wenn man ein Gleiten an den Grenzen annimmt, das der Bedingung (4) in Nr. **13** unterworfen ist. Diese Resultate sind angewandt worden, um ν und β aus den Beobachtungen der Bewegung einer Hohlkugel, welche eine inkompressible Flüssigkeit enthält und sich infolge der Torsion eines Drahtes, an dem sie aufgehängt ist[92]), hin und her dreht, zu berechnen. Jedoch scheint die Methode keiner grossen Genauigkeit fähig zu sein[93]).

Entsprechend den einfachen periodischen Wellen von kleiner Amplitude, welche sich entlang der horizontalen freien Oberfläche einer idealen, schweren Flüssigkeit fortpflanzen können, existiert eine angenäherte Lösung[94]) der Gleichungen für langsame Bewegung im Falle einer nur wenig zähen Flüssigkeit von unendlicher Tiefe. Die betreffende Bewegung ist durch ein Geschwindigkeitspotential der Form

$$\varphi = Ae^{-2\nu k^2 t + ky + i(kx \pm \sigma t)}$$

gegeben, wo die Axe y vertikal nach unten von der freien Oberfläche aus gezogen ist. $\frac{2\pi}{k}$ ist die Wellenlänge und $\frac{\sigma}{k}$ die Geschwindigkeit der entsprechenden Wellen für die ideale Flüssigkeit.

16. Laminarbewegung. Die Bewegungsgleichungen für eine zähe Flüssigkeit sind auf das Problem des Fliessens einer inkompressiblen Flüssigkeit in geneigten Röhren oder Kanälen von gleichförmigem Querschnitt angewandt worden[95]). Wir wählen α als die Neigung

93) *W. C. D. Whetham*, Lond. Phil. Trans. (A) 181 (1890).

94) *Stokes*, Pendulums, p. 60—61; *Lamb*, Hydrodynamics, p. 547. Wegen der Wellenbewegung idealer Flüssigkeiten siehe IV 16, Nr. **5**; wegen weiterer Resultate, die Lösungen der Bewegungsgleichungen von zähen Flüssigkeiten betreffend, siehe IV 16, Nr. **6**.

95) *Stokes*, Friction = Papers 1, p. 105; *J. Boussinesq*, J. de math. (2) 13 (1868), und Eaux courantes. Mit der Lösung der Gleichung (2) für u beschäftigt sich auch *L. Grätz*, Z. f. Math. u. Phys. 25 (1880), sowie *A. G. Greenhill*, Lond. Math. Soc. Proc. 13 (1881). Das Problem ist mathematisch identisch mit dem der Bewegung einer reibungslosen, inkompressiblen Flüssigkeit in einem

der Röhre, die x-Axe in der Verbindungslinie der Schwerpunkte der Normalschnitte und die Ebene (x, y) vertikal; dann giebt es eine Lösung der Gleichungen, bei der, vorausgesetzt, dass

(1) $$v = 0, \quad w = 0, \quad p = g\varrho y \cos\alpha - Ax + \text{const.}$$

sind, u eine von x unabhängige Funktion von y und z wird, die der Gleichung

(2) $$\nu\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right) + \frac{A}{\varrho} + g\sin\alpha = 0$$

genügt und an der Grenze des Querschnittes verschwindet. Die Konstante A ist der Druckgradient beim Fortschreiten entlang der geneigten Röhre. Wenn die Flüssigkeit zwischen zwei parallelen Ebenen fliesst, wird

(3) $$u = \frac{3}{2}U(1 - y^2/c^2), \quad U = \frac{1}{3}c^2\nu^{-1}\left(\frac{A}{\varrho} + g\sin\alpha\right),$$

wo $2c$ der Abstand zwischen den Ebenen und U die mittlere Geschwindigkeit ist. Wenn der Querschnitt der Röhre ein Kreis mit dem Radius a ist, wird

(4) $$u = 2U\left(1 - \frac{r^2}{a^2}\right), \quad U = \frac{1}{8}a^2\nu^{-1}\left(\frac{A}{\varrho} + g\sin\alpha\right),$$

wo r den Abstand von der Axe bezeichnet. Dieselben Lösungen mit $A = 0$ gelten auch für einen offenen Kanal von der Form der unteren Hälfte der Röhre; die freie Oberfläche ist dabei die Ebene (x, z). Die Formel für eine kreisförmige Röhre wurde durch die Experimente von *Poiseuille*[74]) bestätigt, welche gleichzeitig die genauesten Bestimmungen von ν gestatteten. Bei der hier betrachteten Art der Bewegung findet keine Änderung in der Ausbreitung der Wirbelbewegung statt. Die Flüssigkeit ist in Schichten konstanter Geschwindigkeit geordnet. Solche Bewegungen nennt man „Laminar"-Bewegungen, zuweilen auch wohl „reguläre" Bewegungen.

17. Turbulente Bewegungen. Wenn eine inkompressible Flüssigkeit in einer Röhre vom Querschnitt Ω und Umfang χ herabfliesst, so möge die Resultierende der Tangentialspannungen, die der Bewegung entgegenwirken und auf die Flüssigkeit durch denjenigen Teil der Oberfläche der Röhre ausgeübt werden, der zwischen zwei im Abstande δx befindlichen Normalschnitten liegt, durch $R\chi\delta x$ bezeichnet werden. Man hat dann

(1) $$R = \frac{\Omega}{\chi}\left\{g\varrho\sin\alpha - \frac{1}{\Omega}\int\frac{\partial p}{\partial x}\,d\Omega\right\} + \frac{1}{\chi}\int\left(2\mu\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - \varrho\frac{\delta u}{\delta t}\right)d\Omega.$$

rotierenden Prisma von demselben Querschnitt, den die Röhre besitzt (IV 16, Nr. 1e).

Bei der Laminarströmung ist $R = \Omega \chi^{-1} (g \varrho \sin \alpha + A)$. Es ist somit der Röhrenwiderstand proportional mit der mittleren Geschwindigkeit U der Flüssigkeit in einem Querschnitt. Bei experimentellen Untersuchungen können U und $\Omega \chi^{-1} (g \varrho \sin \alpha + A)$ gemessen werden. A ist der Druckgradient für die Verbindungslinie der Schwerpunkte der Normalschnitte. Man hat nun gefunden, dass für enge Röhren und kleine Geschwindigkeiten die zweite dieser Grössen in der That mit U proportional ist, dass sie aber bei weiteren Röhren und grösseren Geschwindigkeiten genauer mit U^2 proportional ist[96]). Dies drückt man gewöhnlich so aus, dass man sagt: in dem ersteren Falle ist der Widerstand mit der Geschwindigkeit selbst, im zweiten Falle mit dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional. Die hiermit bezeichnete „Änderung des Widerstandsgesetzes" erklärt man durch die Annahme, dass, wenn die Geschwindigkeit in einer Röhre von gegebenem Querschnitt einen gewissen Wert überschreitet, unregelmässig wirbelnde Bewegungen[97]) entstehen, und dass die daraus folgende Dissipation der Energie den Effekt hat, die mittlere Geschwindigkeit für einen Querschnitt unter den Wert herabzudrücken, den sie bei der Laminarbewegung mit demselben A und α haben würde. *J. Boussinesq*[97]) hat dies analytisch durch die Annahme auszudrücken versucht, dass die Geschwindigkeit in einem Punkte aus zwei Geschwindigkeiten zusammengesetzt ist: 1) aus einer Geschwindigkeit u_0, die unabhängig von der Zeit ist, 2) aus einer Geschwindigkeit, deren Komponenten u', v', w' in einem beliebigen Punkte derart von der Zeit abhängen, dass ihre mittleren Werte, über eine gewisse kurze Zeit τ genommen, verschwinden. Er hat dann gezeigt, dass unter gewissen Bedingungen die Bewegungsgleichungen (3) der Nr. **13** durch die u_0 erfüllt werden können, sofern man μ durch eine Funktion von u', v', w' ersetzt, (so dass es von der „Intensität der Agitation" in jedem Punkte

96) Dies scheint das wahre Ergebnis der Experimente zu sein; der Widerstand wird nicht direkt gemessen. Wegen der erhaltenen experimentellen Resultate können wir auf *M. H. Darcy*, Recherches expérimentales rélatives au mouvement de l'eau dans les tuyaux, Paris 1855, und auf die Abhandlung von *H. Bazin*, Paris, Mém. div. sav. 19 (1865) verweisen.

97) Die unregelmässig wirbelnden Bewegungen („Eddies"), von denen im Text die Rede ist, sind von den ebenda mathematisch behandelten Wirbelbewegungen („Vortices") verschieden. Die Laminarbewegungen zäher Flüssigkeiten sind stets Wirbelbewegungen im letzteren Sinne. Die Vermutung, dass die „Wirbel" den Grund für „die Änderung des Widerstandsgesetzes" geben, wurde bereits von *B. de Saint-Venant*, Paris, Ann. des mines (4) 20 (1851), p. 229, ausgesprochen; sie wurde aufgenommen von *J. Boussinesq*, Eaux courantes, und *Stokes*, Papers 1, p. 99 Fussn.

abhängt). Er hat diese Funktion nicht explicite in u', v', w' ausgedrückt, nimmt aber an, da die u', v', w' mit dem Abstande von den Wänden und andern ähnlichen Umständen wachsen werden, dass der abgeänderte Reibungskoeffizient mit dem „mittleren hydraulischen Radius" $\frac{\Omega}{\chi}$, ferner mit dem mittleren Werte von u_0 nahe der Begrenzung und einer gewissen Funktion der Koordinaten des in Betracht kommenden Querschnittspunktes proportional ist, die einen mit der Rauhigkeit der Wände wachsenden konstanten Koeffizienten hat.

Dieser Gegenstand ist späterhin von *O. Reynolds*[98]) experimentell untersucht worden, und zwar mit Hülfe von dünnen Fäden gefärbter Flüssigkeit, die er innerhalb ungefärbter Flüssigkeit in Glasröhren hinfliessen liess. Bei genügend kleinen Geschwindigkeiten war die Bewegung der Flüssigkeit, soweit man sehen konnte, geradlinig; wenn aber die Geschwindigkeit wuchs, wurden unregelmässige, wirbelnde Bewegungen beobachtet. Da nun eine Laminarbewegung mit irgendwelcher gegebenen mittleren Geschwindigkeit in einer beliebigen Röhre an sich immer mathematisch möglich ist, so schloss er, dass die Laminarbewegungen in weiten Röhren und bei hohen Geschwindigkeiten labil sein müssen. Durch eine Anwendung des Prinzips der dynamischen Ähnlichkeit[99]) erschloss er sodann aus den Bewegungsgleichungen (3) von Nr. **13**, dass, wenn eine Laminarbewegung bei der mittleren Geschwindigkeit U in einer Röhre vom Radius a bei wachsendem U labil wird, sie allgemein stabil oder labil ist, je nachdem $\frac{Ua}{\nu}$ kleiner oder grösser als eine gewisse kritische Zahl ist[100]). Für Wasser fand *Reynolds*, dass der kritische Wert von $\frac{Ua}{\nu}$ zwischen 950 und 1000 liegt, und er stellte fest[38]), dass alle Experimente von *Poiseuille* und *Darcy* diese Resultate bestätigen. Bei seiner theoretischen Untersuchung hat dann *Reynolds*[38]) die oben genannte Annahme von *Boussinesq* modifiziert. Er setzt nämlich voraus, dass die zusätzlichen Geschwindigkeiten u', v', w' in roher Annäherung für kleine Längen und kleine Zeiten periodisch sind, und er zeigt dann, dass diese Voraussetzung in der That zu einem Werte der mittleren Geschwindigkeit in einer gegebenen Röhre führt, welche merklich kleiner ist als diejenige, welche der Laminarbewegung entspricht.

98) Lond. Phil. Trans. 174 (1883).

99) Lord *Rayleigh*, Theory of Sound 2, London 1878, p. 287; vgl. *Helmholtz*, Berl. Ber. 1873 = Wiss. Abh. 1, p. 158.

100) Die Existenz einer kritischen Geschwindigkeit wurde bereits von *G. H. L. Hagen*, Berl. Abh. 1854, bemerkt.

Die hiermit besprochene Bewegungsart von Wasser, das in einer Röhre scheinbar gleichförmig, thatsächlich aber in höchst unregelmässiger Weise herabfliesst, tritt, wie die Beobachtung zeigt, ebensowohl bei vielen anderen scheinbar stationären Flüssigkeitsbewegungen auf[101]). Man nennt die betreffenden Bewegungen „turbulente Bewegungen". Die Resultate vieler experimenteller Untersuchungen über den Widerstand der Flüssigkeiten, wie z. B. *Coulomb*'s schwingende Scheibe[102]) und *Froude*'s Brett[103]), haben gezeigt, dass auch in andern Fällen der Widerstand genauer mit dem Quadrate der Geschwindigkeit[104]) proportional ist, als mit ihrer ersten Potenz; diese Resultate weisen ebenfalls auf die Existenz turbulenter Bewegung hin.

18. Labilität der Laminarbewegung. Die Frage der Stabilität oder Labilität von Laminarbewegungen wurde von Lord *Rayleigh* in Verbindung mit Untersuchungen über Flüssigkeitsstrahlen erörtert. In einer idealen Flüssigkeit sind Bewegungen, bei denen Unstetigkeitsflächen auftreten, zwar theoretisch möglich[105]), aber stets labil, und es scheint, dass die Tendenz zur Labilität desto grösser ist, je kürzer die Wellenlänge der Störung ist[106]). Wenn man der Zähigkeit Rechnung trägt, zeigt sich, dass Unstetigkeitsflächen überhaupt nicht fortbestehen können, sondern dass sich Wirbelbewegung in die Flüssigkeit hinein von beiden Seiten der Oberfläche ausbreitet, die solcherweise eine Art Übergangsschicht herstellt[107]). In einer idealen Flüssigkeit kann eine solche Übergangsschicht die Bewegung stabil machen. Hat man eine Laminarbewegung einer idealen Flüssigkeit mit der Geschwindigkeit $u_0 = f(y)$ zwischen zwei Ebenen $y = \text{const.}$, und wird dieselbe gestört, so kann man die Geschwindigkeit nach der Störung als $(u_0 + u', v)$ annehmen. Hat nun die Bewegung nach der Störung weiterhin den Charakter einer Wellenbewegung von der

101) *J. Boussinesq*, Eaux courantes, p. 6; *O. Reynolds*, Lond. Phil. Trans. 174 (1883), p. 941; *N. Joukowsky*, Mosk. Verh. d. Naturfr. 4 (1891). Siehe auch IV 20.

102) *J. Coulomb*, Paris, Mém. de l'Inst. 3 (1800). Die Methode wurde von *O. E. Meyer*, J. f. Math. 59 (1861), und von *Maxwell*, Lond. Phil. Trans. 166 (1856), benutzt.

103) *W. Froude*, Brit. Assn. Rep. 1872. Vgl. *W. C. Unwin*, Artikel Hydromechanics, Part. III Hydraulics, Ency. Brit. 12, Edinburgh 1881.

104) Die Regel, dass der Widerstand dem Quadrate der Geschwindigkeit proportional ist, wurde von *Newton*, Principia Lib. 2, Sect. 7 gegeben. Sie scheint in der Zeit *d'Alembert*'s allgemein acceptiert worden zu sein, siehe dessen Essai . . . . de la résistance des fluides (1752).

105) Siehe IV 16, Nr. 1 f.

106) Lord *Rayleigh*, Lond. Math. Soc. Proc. 10 (1878) = Papers 1, p. 366.

107) Lord *Rayleigh*, Lond. Math. Soc. Proc. 11 (1880) = Papers 1, p. 475.

(reellen) Fortschreitungsgeschwindigkeit W, so ist die Laminarbewegung gewiss stabil[108]). Unter diesen Umständen genügt v für jede Flüssigkeitsschicht, in welcher $\frac{du_0}{dy}$ stetig ist, einer Gleichung von der Form

$$(1) \qquad (u_0 - W)\left(\frac{d^2v}{dy^2} - k^2v\right) - \frac{d^2u_0}{dy^2} \cdot v = 0;$$

andererseits genügt v bestimmten speziellen Bedingungen an den Begrenzungen und an denjenigen Oberflächen, an denen $\frac{du_0}{dy}$ sich unstetig ändert. Diese Gleichungen und Bedingungen genügen in gewissen Fällen bei Annahme einer Störung von der Wellenlänge $\frac{2\pi}{k}$ zur Bestimmung des Wertes W.[109]) Sollte dieser Wert von W ein Wert sein, der von u_0 an irgend einer Stelle angenommen wird, so entsteht eine besondere Schwierigkeit[110]), da solch eine Stelle für die Differentialgleichung (1) eine singuläre Stelle ist, und singuläre Stellen in einem von Flüssigkeit erfüllten Raume nicht auftreten können.

Wenn man der Reibung Rechnung trägt und die durch $u_0 = \frac{3}{2} U\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right)$ gegebene Bewegung[111]) durch Hinzufügung kleiner Geschwindigkeiten u', v, w abändert, die sämtlich den einen Faktor $e^{i(\sigma t + \alpha x + \beta z)}$ enthalten, während die andern Faktoren Funktionen von y sind, so ist die Gleichung[112]) für v

$$(2) \quad \nu\left\{\frac{d^4v}{dy^4} - 2(\alpha^2+\beta^2)\frac{d^2v}{dy^2} + (\alpha^2+\beta^2)^2 v\right\} - i\sigma\left\{\frac{d^2v}{dy^2} - (\alpha^2+\beta^2)v\right\}$$
$$- \frac{3U}{c^2} i\alpha v - \frac{3}{2} U\left(1 - \frac{y^2}{c^2}\right) i\alpha\left\{\frac{d^2v}{dy^2} - (\alpha^2+\beta^2)v\right\} = 0.$$

Gleichzeitig muss v auch bestimmte Bedingungen an den Begrenzungen erfüllen. Da diese Gleichung im Endlichen keine singulären Stellen hat, wird ein scheinbarer Anlass zur Labilität bei der Laminarbewegung unmittelbar dadurch entfernt[112]), dass man die Be-

108) Lord *Rayleigh* hat diese Dinge in einer Reihe von Aufsätzen behandelt, Lond. Math. Soc. Proc. 11 (1880), 19 (1888) und 27 (1896); Phil. Mag. (5) 34 (1892).

109) Der bemerkenswerteste Fall ist der, wo du_0/dy sich unstetig an einer Reihe von Ebenen $y = \text{const.}$ ändert und stets in demselben Sinne wächst; siehe Lord *Rayleigh* (Fussn. 107). Wenn du_0/dy stetig veränderlich ist, scheint die Methode nur auf einige spezielle Typen der Störung anwendbar zu sein; siehe *A. E. H. Love*, Lond. Math. Soc. Proc. 27 (1896).

110) Sir *W. Thomson*, „On a disturbing infinity in Lord Rayleigh's solution . . . .", Brit. Assn. Rep. 1880.

111) Siehe Gleichung (3), Nr. **16**.

112) Sir *W. Thomson* ist hierauf in einer Reihe von Aufsätzen im Phil. Mag. (5) 24 (1887) eingegangen.

wegungsgleichungen reibender Flüssigkeiten benutzt, anstatt die Wirkungen der Reibung durch Übergangsschichten in einer idealen Flüssigkeit darzustellen. Zum Beweis der Stabilität ist es erforderlich, dass die Gleichung (2) unter Berücksichtigung der Grenzbedingungen zu Werten von $i\sigma$ führt, die entweder rein imaginär sind oder negative reelle Teile haben[113]). Man hat gefunden, dass $i\sigma$ reell und negativ ist, wenn $U = 0$[114]) wird, sowie wenn die Störung derart ist, dass $w = 0$ und u', v unabhängig von x und z sind[115]). Jedoch werfen diese Resultate wenig Licht auf die allgemeine Frage.

Statt des Versuches, die Stabilität der Laminarbewegung vermöge der Methode der kleinen Schwingungen zu diskutieren, hat man vorgeschlagen, ein Energiekriterium[116]) zur Bestimmung dafür zu suchen, ob eine geringfügige turbulente Bewegung einer stärkeren oder schwächeren Turbulenz zustrebt. Die Bewegung werde durch Überlagerung einer Geschwindigkeit (u', v', w'), die die Periode τ besitzt, und einer mittleren Geschwindigkeit $\bar{u}, \bar{v}, \bar{w}$ dargestellt. Die letztere genügt dann Gleichungen von der Form der Gleichungen (2) in Nr. **13**, vorausgesetzt, dass $p_{xx} \ldots$ durch die Grössen

$$(3)\quad p_{xx} = 2\mu \frac{\partial \bar{u}}{\partial x} - \varrho \overline{u'^2} - \bar{p}, \ldots, \; p_{yz} = \mu \left(\frac{\partial \bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial \bar{v}}{\partial z} \right) - \varrho \overline{v' w'}, \ldots$$

ersetzt werden. Der Druck besteht aus einem mittleren Druck p und einem periodisch veränderlichen Druck p'. Die Grössen u', v', w', p' genügen Gleichungen von der Form[117])

$$(4)\quad \frac{\partial u'}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial u'}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial u'}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial u'}{\partial z} + u'\frac{\partial \bar{u}}{\partial x} + v'\frac{\partial \bar{u}}{\partial y} + w'\frac{\partial \bar{u}}{\partial z}$$
$$= -\frac{1}{\varrho}\frac{\partial p'}{\partial x} + \nu \Delta u' + \frac{\partial (\overline{u'^2})}{\partial x} + \frac{\partial (\overline{u'v'})}{\partial y} + \frac{\partial (\overline{u'w'})}{\partial z}$$
$$- \frac{\partial (u'^2)}{\partial x} - \frac{\partial (u'v')}{\partial y} - \frac{\partial (u'w')}{\partial z},$$

113) Dies wurde von Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 34 (1892) gefunden. Sir *W. Thomson* hatte vorher geschlossen, dass die Laminarbewegung stets stabil sei (Fussn. 112).

114) Lord *Rayleigh* (Fussn. 113).

115) Dieses Resultat wurde bei der Prüfung für „the Math. Tripos" Part II, 1896, Camb. Univ. Exam. Papers 1896, vorgelegt.

116) *O. Reynolds* (Fussn. 38) fand die weiter unten angeführte Gleichung (5); die Theorie wurde weiter verfolgt von *H. A. Lorentz*, Amst. Versl. 6 (1897). Letzterer gab die Gleichungen (3) und (4) und zeigte, wie aus den Gleichungen (6) und (7) Folgerungen gezogen werden können, indem er auch eine ins Einzelne gehende Erörterung für eine kreisförmige Röhre gab.

117) Die korrigierte Form dieser Gleichungen verdankt der Referent einer gütigen Mitteilung von Hrn. *H. A. Lorentz*.

wobei die Geschwindigkeit (u', v', w') jedenfalls solenoidal sein muss. Wenn wir

$$\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + \bar{u}\frac{\partial}{\partial x} + \bar{v}\frac{\partial}{\partial y} + \bar{w}\frac{\partial}{\partial z}$$

setzen, wird der Zuwachs der kinetischen Energie der turbulenten Bewegung durch die Gleichung

$$(5)\quad \frac{d}{dt}\iiint \tfrac{1}{2}\varrho(u'^2 + v'^2 + w'^2)\,dx\,dy\,dz = \varrho\iiint M\,dx\,dy\,dz - \varrho\nu\iiint N\,dx\,dy\,dz$$

bestimmt, wo

$$(6)\quad M = -\Big[u'^2\frac{\partial\bar{u}}{\partial x} + v'^2\frac{\partial\bar{v}}{\partial y} + w'^2\frac{\partial\bar{w}}{\partial z} + v'w'\Big(\frac{\partial\bar{w}}{\partial y} + \frac{\partial\bar{v}}{\partial z}\Big) + w'u'\Big(\frac{\partial\bar{u}}{\partial z} + \frac{\partial\bar{w}}{\partial x}\Big) + u'v'\Big(\frac{\partial\bar{v}}{\partial x} + \frac{\partial\bar{u}}{\partial y}\Big)\Big],$$

$$(7)\quad N = 2\Big(\frac{\partial u'}{\partial x}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial v'}{\partial y}\Big)^2 + 2\Big(\frac{\partial w'}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial w'}{\partial y} + \frac{\partial v'}{\partial z}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial u'}{\partial z} + \frac{\partial w'}{\partial x}\Big)^2 + \Big(\frac{\partial v'}{\partial x} + \frac{\partial u'}{\partial y}\Big)^2.$$

Damit eine nur wenig turbulente Bewegung in stärkere Turbulenz gerät, muss die Grösse M positiv und der erste Ausdruck auf der rechten Seite der Gleichung (5) grösser als der zweite sein. Durch diese Formeln für M und N scheint das experimentelle Resultat bestätigt, dass in engen Räumen die Bewegung regulär zu werden bestrebt ist, dagegen in weiteren Räumen die turbulente Bewegung die Regel ist.

19. Beziehungen zur Molekulartheorie. Die Theorie einer Flüssigkeit als eines mechanischen Systems von kontinuierlich den Raum erfüllenden Teilchen, die vermittelst eines geeigneten Drucks durch die sie trennenden Oberflächen hindurch auf einander wirken, scheint für die Erklärung der Phänomene, wie sie bei dem Gleichgewicht und den Bewegungen von Flüssigkeiten unter gewöhnlichen Bedingungen auftreten, im ganzen ausreichend zu sein. Doch gestattet dieselbe keine Anwendung auf solche Phänomene, wie Diffusion und osmotischen Druck. Eine vollständige Theorie der Flüssigkeitsbewegungen würde notwendigerweise auf einer molekularen Grundlage aufgebaut werden müssen, und die beiden fundamentalen Begriffe der gewöhnlichen Theorie — Druck und Geschwindigkeit in einem Punkte — würden dann eine präzisere Definition erfordern. Selbst bei denjenigen Erscheinungen, auf die sich die gewöhnliche Theorie sehr wohl anwenden lässt, muss man notwendigerweise einen Kompromiss zwischen dem molekularen

und dem mechanischen Standpunkte schliessen, insbesondere was die Erscheinungen der Kapillarität und Zähigkeit angeht. Die erstere wird in der Kontinuitätstheorie durch die Annahme einer hinzutretenden Oberflächenspannung als einer Thatsache, die sich aus der Erfahrung ergiebt, unter den mechanischen Gesichtspunkt gebracht, die letztere durch die Annahme, dass die Energie nach einem bestimmten Gesetze dissipiert wird. Aber nur von Seiten der molekularen Theorie kann man eine Erklärung für den Ursprung der Oberflächenspannung und der mit der beobachteten Dissipation der Energie verbundenen Transformation derselben geben. Derartige Erklärungen gehören in Band V.

(Abgeschlossen im April 1901.)

IV 16. HYDRODYNAMIK: THEORETISCHE AUSFÜHRUNGEN.

Von

A. E. H. LOVE

IN OXFORD.

Inhaltsübersicht.

1. Wirbelfreie Bewegung.

a) Permanenz der wirbelfreien Bewegungen. Cyklische Bewegungen.
b) Wirbelfreie Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit.
c) Quellen und Senken.
d) Bilder.
e) Strömen in zwei Dimensionen.
f) Diskontinuierliche Bewegung.
g) Dreidimensionale Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit.

2. Bewegung fester Körper in einer inkompressiblen Flüssigkeit.

a) Kinematik. Bewegung einer Kugel.
b) Kinetische Energie.
c) Hydrokinetische Symmetrie.
d) Bewegungsgleichungen.
e) Cyklische Bewegung.
f) Bewegung zweier Kugeln.
g) Pulsierende Kugeln.

3. Wirbelbewegungen.

a) Transformation der allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen.
b) Allgemeine Sätze über Wirbelsysteme.
c) Kreiswirbel.
d) Ebene Wirbelfelder.
e) Schwingungen von Wirbeln.
f) Gegenseitige Wirkung beliebiger unendlich dünner Wirbelringe.
g) Wirbel von endlichem Querschnitt.

4. Der eigenen Schwere unterworfene flüssige Ellipsoide.

a) Allgemeine Theorie.
b) Nähere Angaben über *Maclaurin*'s Sphäroid und *Jacobi*'s Ellipsoid.

5. Wellenbewegung inkompressibler Flüssigkeiten.

a) Natur der Bewegung.
b) Lange Wellen.
c) Oscillatorische Wellen.
d) Energie der Wellenbewegung. Gruppengeschwindigkeit.
e) Stehende Wellen.
f) Stehende Oscillationen in Bassins.
g) Genauere Bestimmung von Wellenbewegungen.
h) Die Einzelwelle.
i) Oscillationen einer flüssigen Kugel.

6. Zähe Flüssigkeiten.

a) Bewegungsgleichungen. Stationäre Bewegung.
b) Veränderliche und periodische Bewegungen.

Litteratur.

Siehe die Lehrbücher und Monographieen unter IV 15 und ausserdem etwa:

Monographien.

J. L. de Lagrange, Mémoire sur la théorie du mouvement des fluides, Berl. Mém. (2) 12 (1781) und Oeuvres de Lagrange 4, Paris 1869.

S. D. Poisson, Mémoire sur la théorie des ondes, Paris, Mém. de l'Acad. 1 (1816).

A. L. Cauchy, Mémoire sur la théorie des ondes, Paris, Mém. sav. étr. 1 (1827) und Oeuvres complètes (1) 1, Paris 1882.

E. H. u. *W. Weber*, Wellenbewegung auf Experimente gegründet, Leipzig 1825.

S. D. Poisson, Mémoire sur les mouvements simultanes d'un pendule et de l'air environnant, Paris, Mém. de l'Acad. 11 (1832).

G. G. Stokes, On the steady motion of incompressible fluids, Cambr. Phil. Soc. Trans. 7 (1842) und Math. and Phys. Papers 1, p. 1.

G. G. Stokes, On some cases of fluid motion, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1843) und Math. and Phys. Papers 1, p. 17.

J. Scott Russell, Report on Waves, Brit. Assn. Rep. 1844.

G. B. Airy, Artikel „Tides and Waves", Encyclopaedia Metropolitana, London 1845.

G. G. Stokes, On the theory of Oscillatory Waves, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1847) und Math. and Phys. Papers 1, p. 197; Supplement p. 314 (1880).

P. G. Lejeune-Dirichlet, Über einige Fälle, in welchen sich die Bewegung eines festen Körpers in einem inkompressiblen flüssigen Medium theoretisch bestimmen lässt, Berl. Ber. 1852.

A. Clebsch, Über die Integration der hydrodynamischen Gleichungen, J. f. Math. 56 (1859).

P. G. Lejeune-Dirichlet, Untersuchungen über ein Problem der Hydrodynamik (aus dem Nachlass hergestellt von *R. Dedekind*), zuerst Gött. Abh. 8 (1860), dann J. f. Math. 58 (1861).

H. Hankel, Zur allgemeinen Theorie der Bewegung der Flüssigkeit, Göttingen, Preisschrift 1861.

B. Riemann, Ein Beitrag zu den Untersuchungen über die Bewegung eines

flüssigen gleichartigen Ellipsoids, Gött. Abh. 9 (1861) und Ges. math. Werke, Leipzig, 2. Aufl. 1892, p. 182.
W. Thomson (Lord *Kelvin*), On Vortex-Motion, Edinb. Roy. Soc. Trans. 25 (1868) (*Vortex-Motion*).
H. Helmholtz, Über diskontinuierliche Flüssigkeitsbewegungen, Berl. Ber. 1868, p. 215 = Wissenschaftl. Abh. 1, p. 146.
G. Kirchhoff, Über die Bewegung eines Rotationskörpers in einer Flüssigkeit, J. f. Math. 71 (1869), Ges. Abh., Leipzig 1882, p. 376.
G. Kirchhoff, Zur Theorie freier Flüssigkeitsstrahlen, J. f. Math. 70 (1869) und Ges. Abh. p. 416.
W. M. Hicks, On the motion of two spheres in a fluid, Lond. Phil. Trans. 171 (1880).
C. Neumann, Hydrodynamische Untersuchungen, Leipzig 1883 (*Hydr. Unt.*).
J. J. Thomson, A treatise on the motion of Vortex-Rings, London 1883 (*Vortex-Rings*).
W. M. Hicks, On the steady motion and small vibrations of a hollow vortex, Lond. Phil. Trans. 175 (1884).
H. Poincaré, Sur l'équilibre d'une masse fluide animée d'un mouvement de rotation, Acta math. 7 (1885).
A. G. Greenhill, Wave motion in Hydrodynamics, Amer. J. of math. 9 (1886).
A. E. H. Love, On recent English researches in Vortex-motion, Math. Ann. 30 (1887).
M. Brillouin, Questions d'Hydrodynamique, Toul. Ann. 1 (1887).
N. Quint, De Werfelbeweging, Diss. Amsterdam 1888.
J. C. van den Berg, De Werfelbeweging, Diss. Haarlem 1888.
H. Poincaré, Théorie des tourbillons, Paris 1893.
V. Bjerknes, Vorlesungen über hydrodynamische Fernkräfte nach C. A. Bjerknes' Theorie, Leipzig 1900.

Soweit nicht anders angegeben wird, sollen in diesem Artikel die äusseren Kräfte als konservativ und die in Rede stehende Flüssigkeit als nicht-zäh angenommen werden. Ist letztere kompressibel, so soll der Druck eine eindeutige Funktion der Dichte ϱ sein, ist sie inkompressibel, so nehmen wir sie homogen an.

1. Wirbelfreie Bewegung.

1a. Permanenz der wirbelfreien Bewegungen. Cyklische Bewegungen. Das Linienintegral der Geschwindigkeit $\int (u\,dx + v\,dy + w\,dz)$, entlang einer Kurve, die zwei Punkte in der Flüssigkeit verbindet, heisst die „Cirkulation" entlang jener Kurve[1]). Bei einer wirbelfreien Bewegung ist die Differenz der Werte, welche das Geschwindigkeitspotential φ in zwei Punkten annimmt, gleich der Cirkulation entlang einer beliebigen, die beiden Punkte verbindenden Kurve. Nach dem *Stokes*'schen

1) Sir *W. Thomson*, Vortex-Motion; *Lamb,* Hydrodynamics, Ch. 3.

Satze[2]) ist die Cirkulation in einer geschlossenen, innerhalb der Flüssigkeit gezogenen Kurve gleich dem doppelten Oberflächenintegral der Normalkomponente der Drehgeschwindigkeit, genommen über eine beliebige Fläche, die diese Kurve zur Berandung hat. Sir *W. Thomson*[1]) hat bewiesen, dass die Cirkulation entlang einer geschlossenen Kurve, welche stets dieselben Teilchen enthält, eine von der Zeit unabhängige Grösse ist. Es folgt, dass, wenn die anfängliche Bewegung wirbelfrei ist, die Bewegung auch in ihrem weiteren Verlauf wirbelfrei bleibt[3]). Es folgt ferner, dass, wenn der von der Flüssigkeit erfüllte Raum einfach zusammenhängt, die Cirkulation entlang jeder geschlossenen Kurve verschwindet und das Geschwindigkeitspotential φ einwertig ist. Wenn der Raum mehrfach zusammenhängt und die Zusammenhangszahl $n+1$[4]) hat, so existieren n fundamentale, nicht auf einen Punkt zusammenziehbare, geschlossene Kurven, und jede andere nicht auf einen Punkt zusammenziehbare, geschlossene Kurve kann in eine oder mehrere dieser n Kurven, jede in einer bestimmten Multiplizität genommen, übergeführt werden. In diesem Falle sind die Cirkulationen in diesen n Kurven Konstante $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, welche „cyklische Konstante“ heissen[1]); die Cirkulation in einer beliebigen Kurve der eben beschriebenen Art wird dann durch $a_1\varkappa_1 + a_2\varkappa_2 + \cdots + a_n\varkappa_n$ ausgedrückt, wo $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ganze positive oder negative Zahlen sind. Das Geschwindigkeitspotential φ ist hier mehrwertig[5]), aber die Werte, welche es in einem Punkte annehmen kann, unterscheiden sich unter einander nur um konstante Beträge von der Form $a_1\varkappa_1 + a_2\varkappa_2 + \cdots + a_n\varkappa_n$.[1])

1b. Wirbelfreie Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Wenn eine ruhende, inkompressible Flüssigkeit durch einen impulsiven Druck p_0 in Bewegung gesetzt wird, so sind die Gleichungen der entstehenden Bewegung

$$\varrho\,(u, v, w) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) p_0; \tag{1}$$

2) II A 2, Nr. **16** und IV **14**, Nr. **5**.

3) *Lagrange*'s Beweis, Berl. Mém (2) 12 (1781), Méc. an. 2, p. 269—271 war unvollständig. Der erste genaue Beweis wurde von *Cauchy*, Paris, Mém. sav. étr. 1 (1827) gegeben. Einen andern Beweis mit kritischen und historischen Bemerkungen gab *Stokes*, Friction. Wegen des Beweises von Sir *W. Thomson*, der die beiden Theoreme der Cirkulation benutzt, siehe *Lamb*, Hydrodynamics, p. 38, 39. Betreffs Erzeugung von Wirbelbewegung, wenn die hier gegebenen Bedingungen nicht erfüllt sind, siehe *J. R. Schütz*, Ann. Phys. Chem. 56 (1895); *L. Silberstein*, Krak. Anz. (1896); *V. Bjerknes*, Phys. Zeitschr. 1 (1900).

4) III A 4.

5) *Helmholtz*, Wirbelbewegung.

diese anfängliche Bewegung ist also wirbelfrei und hat das Geschwindigkeitspotential $-p_0/\varrho$. Allgemein kann man bei einer Flüssigkeit, deren Dichte $= 1$ ist, das negativ genommene Geschwindigkeitspotential einer wirbelfreien Bewegung als den impulsiven Druck auffassen, durch welchen die Bewegung instantan erzeugt werden könnte[6]). Eine cyklische, wirbelfreie Bewegung in einem mehrfach zusammenhängenden Raume kann man sich dadurch entstanden denken, dass man impulsive Drucke auf die Querflächen ausübt, durch welche man gegebenenfalls den Raum einfach zusammenhängend gemacht hat[1]). Ist ω_r die Oberfläche der Querfläche, die denjenigen geschlossenen Kurven entspricht, entlang deren die Cirkulation $\varkappa_r$ ist, so ist der auf die Querfläche anzuwendende impulsive Druck $\iint \varrho \varkappa_r d\omega_r$, die Integration über die eine Seite der Oberfläche erstreckt.

Da die Geschwindigkeit einer inkompressiblen Flüssigkeit solenoidal[7]) ist, so ist das Geschwindigkeitspotential φ in dem von der Flüssigkeit eingenommenen Raume eine harmonische Funktion[8]).

Ist dieser Raum einfach zusammenhängend und die Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Grenze gegeben, so ist φ bis auf eine additive Konstante bestimmt[9]). Die kinetische Energie der Flüssigkeit ist $-\frac{1}{2}\varrho \iint \varphi \frac{\partial \varphi}{\partial \nu} dS$,[10]) wo $d\nu$ das Element der nach dem Innern der Flüssigkeit gezogenen Normalen in einem Punkte der begrenzenden Oberfläche S bezeichnet. Die kinetische Energie der wirbelfreien Bewegung, mit gegebener Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Grenze, ist kleiner als die jeder andern Be-

---

6) *Basset*, Hydrodynamics 1, p. 38; *Lamb*, Hydrodynamics p. 13, 50. Das Resultat wurde der Sache nach bereits von *Lagrange*, Méc. an. 2, p. 272 gegeben. Für die impulsive Bewegung zäher Flüssigkeiten gelten dieselben Gleichungen wie für ideale Flüssigkeiten.

7) IV 14, Nr. 7 und IV 15, Nr. 7.

8) II A 7 b, Nr. 2. Ist die Flüssigkeit kompressibel, so ist die Geschwindigkeit nicht notwendig solenoidal und φ also nicht notwendig harmonisch. Die dann von φ befriedigte Differentialgleichung wurde von *P. Molenbroek*, Arch. f. Math. (2) 9 (1889) gegeben.

9) Das Integral der gegebenen Normalkomponente der Geschwindigkeit, genommen über die Grenze, muss natürlich verschwinden. Wegen der eindeutigen Bestimmtheit von φ siehe *Thomson* and *Tait*, Nat. Phil. 1, p. 301, oder *Lamb*, Hydrodynamics p. 45. Wegen des hierin enthaltenen Existenztheorems vgl. man etwa *Poincaré*, Théorie du potentiel Newtonien, Paris 1899, p. 320 ff. Siehe II A 7 b, Nr. 17.

10) Sir *W. Thomson*, Cambr. and Dubl. Math. J. 4 (1849) = Math. and Phys. Papers 1, p. 107.

wegung mit solenoidaler Verteilung der Geschwindigkeit und derselben Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Grenze. Es folgt daher, dass, wenn die Grenze in irgend einer Weise in Bewegung gesetzt wird (wobei nur das von der Flüssigkeit eingenommene Volumen ungeändert bleiben muss), ein bestimmter Zustand einer wirbelfreien Bewegung in der Flüssigkeit hervorgerufen wird[10]). Bleibt insbesondere die Grenze in Ruhe, so findet keine Flüssigkeitsbewegung statt; bewegt sich die Grenze wie ein starrer Körper, aber ohne Rotation, so hat die Flüssigkeit keine Bewegung relativ zur Grenze. Die Maxima und Minima von φ liegen an der Grenze[11]), ebenso das Maximum der resultierenden Geschwindigkeit q.[12])

Hängt der von der Flüssigkeit eingenommene Raum mehrfach zusammen, so ist die Bewegung bestimmt, sobald die cyklischen Konstanten samt der Normalkomponente der Geschwindigkeit an der Grenze gegeben sind[1]). Die kinetische Energie der Flüssigkeit ist alsdann

$$-\tfrac{1}{2}\varrho\iint\varphi\frac{\partial\varphi}{\partial\nu}\,dS+\tfrac{1}{2}\varrho\sum_{r=1}^{n}\varkappa_r\iint\frac{\partial\varphi}{\partial\nu_r}\,d\omega_r.$$

Hier bedeutet $d\nu_r$ das Element der Normalen für die Querfläche ω_r, gezogen in derjenigen Richtung, in welcher der impulsive Druck $\iint\varrho\varkappa_r\,d\omega_r$ angewendet werden muss, um die Bewegung zu erzeugen.

Dehnt sich der von der Flüssigkeit eingenommene Raum bis ins Unendliche aus, so muss man über das Unendliche besondere Angaben machen. Wenn die Flüssigkeit nur innere Grenzen hat, so verlangt man gewöhnlich, dass entweder a) die Geschwindigkeit im Unendlichen verschwindet, d. h. $\varphi = \text{const.}$ (für alle unendlich fernen Punkte), oder dass b) die Geschwindigkeit für alle unendlich fernen Punkte dieselbe ist, z. B. $\partial\varphi/\partial x = \text{const.}$ und $\partial\varphi/\partial y = \partial\varphi/\partial z = 0$.

Wenn die Komponente w der Geschwindigkeit Null ist und die anderen Komponenten u, v von z nicht abhängen, so nennt man die Bewegung zweidimensional. Es genügt anzunehmen, dass sie in der Ebene (x, y) erfolgt, indem man sich vorstellt, dass die Flüssigkeit nur diese Ebene bezw. einen Teil derselben überdeckt. Man kann aber auch annehmen, dass sie in einem Raume erfolgt, der von zwei zur Ebene (x, y) parallelen Ebenen begrenzt wird. Wirbelfreie Be-

---

11) II A 7 b, Fussn. 89.

12) Sir *W. Thomson*, Phil. Mag. (3) 37 (1850), p. 241 = Reprint of papers on Electrostatics and Magnetism, London 1872, p. 509. Siehe auch *Kirchhoff*, Mechanik, p. 186; *Lamb*, Hydrodynamics p. 42.

wegungen einer inkompressiblen Flüssigkeit in zwei Dimensionen hängen in derselben Weise von logarithmischen Potentialen[13]) ab, wie solche Bewegungen in drei Dimensionen von Newton'schen Potentialen.

1 c. Quellen und Senken. Bezeichnet man mit r die Entfernung eines Punktes (x, y, z) von einem festen Punkte A, so kann man die Funktion $-Mr^{-1}$, $-M = \text{const.}$ —, welche überall, ausser im Punkte A, harmonisch ist, als Geschwindigkeitspotential einer Flüssigkeitsbewegung ansehen, die in dem A umgebenden Raume statt hat. $4\pi M$ ist das Flüssigkeitsvolumen, welches dabei in der Zeiteinheit über eine Oberfläche, die A umgiebt, hinüberfliesst. Die Singularität in A ist eine *Quelle* von der *Ergiebigkeit* M. Ist M negativ, so ist die Singularität eine *Senke*. Ein *Quellpaar* entsteht, wenn man eine Quelle und eine Senke von der gleichen, absoluten Ergiebigkeit M in geeigneter Weise zusammenrücken lässt. Es muss dabei, wenn h den ursprünglichen Abstand der Quelle und Senke bezeichnet, $M' = \lim \cdot Mh$ endlich sein; die Grösse M' heisst die *Stärke* des Quellpaars. Das Geschwindigkeitspotential, das sich bei diesem Grenzübergang ergiebt, ist $M'r^{-2}\cos\vartheta$. Hier ist ϑ der Winkel zwischen der Axe des Quellpaars und der von dem Quellpaar aus nach einem Punkte gezogenen Geraden von der Länge r. Bei einer zweidimensionalen Bewegung sind die Geschwindigkeitspotentiale für eine Quelle und ein Quellpaar bezw. $M\log r$ und $M'r^{-1}\cos\vartheta$, wo r und ϑ ebene Polarkoordinaten sind. Mit den hier gewonnenen Vorstellungen lässt sich das Theorem (19) in II A 7 b in der Weise auffassen, dass es besagt: jede wirbelfreie Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit kann als von Quellen und Quellpaaren herrührend angesehen werden. Ist der von der Flüssigkeit eingenommene Raum einfach zusammenhängend, so hat man nur Quellen über die Grenze zu verteilen[14]).

---

13) II A 7 b, Nr. 8. Die Theorie ist systematisch u. a. von *Kirchhoff*, Mechanik, Vorlesung 21 entwickelt.

14) *Lamb*, Hydrodynamics p. 63 ff. Das Resultat ist im wesentlichen bereits in *G. Green*'s Essay on the application of mathematical analysis to the theories of Electricity and Magnetism, Nottingham 1828 enthalten (wiederabgedruckt in J. f. Math. 39, 44, 47 (1850—1854) = Papers, London 1871, p. 30). Der in Rede stehende Ausdruck der Geschwindigkeitskomponenten für eine Flüssigkeit vermittelst der Attraktionskomponenten gewisser fingierter, über die Grenze hin verteilter Massen wurde von *J. Boussinesq*, „Eaux courantes", sowie in vielen seiner späteren Schriften benutzt, um eine angenäherte Theorie der *vena contracta* zu erhalten. Seine Methode ist in den Fortschr. d. Math. 19 (1887) eingehend kritisiert worden.

Hängt aber der Raum mehrfach zusammen, so hat man ausserdem auf den Querflächen, die man zur Herstellung des einfachen Zusammenhanges konstruiert hat, Quellpaare anzubringen[15]).

1 d. Bilder. Befindet sich die inkompressible Flüssigkeit ausserhalb einer festen, geschlossenen Oberfläche oder auf der einen Seite einer bis ins Unendliche sich erstreckenden Oberfläche, und rührt ihre Bewegung von isolierten Singularitäten her, so führt das Problem: die Bedingungen zu erfüllen, dass keine normale Geschwindigkeit an der Grenze existiert, zur Einführung von Bildern der Singularitäten[16]). Das *Bild* einer Quelle oder eines andern singulären Punktes in Bezug auf die Oberfläche ist einfach ein Aggregat solcher singulärer Punkte auf der andern Seite der Oberfläche, die mit dem gegebenen singulären Punkte zusammen ein Potential φ ergeben, welches entlang der Oberfläche die Bedingung $\frac{\partial \varphi}{\partial \nu} = 0$ befriedigt. Ausserdem muss dieses Potential selbstverständlich in dem ganzen, von der Flüssigkeit eingenommenen Raum mit Ausnahme der singulären Stelle harmonisch sein. Ist insbesondere φ das Geschwindigkeitspotential für eine Quelle A, von der Ergiebigkeit 1, auf der einen Seite der Oberfläche, so setze man $\varphi = \varphi' - r^{-1}$, unter r den Abstand eines Punktes von A verstanden. Hier ist φ' in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raume harmonisch, während an der Oberfläche $\frac{\partial \varphi'}{\partial \nu} = \frac{\partial r^{-1}}{\partial \nu}$ gilt. Diese Funktion φ' ist das von dem Bilde herrührende Geschwindigkeitspotential. Befindet sich die Flüssigkeit auf der einen Seite einer unendlich ausgedehnten Ebene, so ist das Bild einer Quelle eine ihr gleiche Quelle im Spiegelbilde. Für eine Quelle (a, b, c) in einem zwischen zwei Ebenen $x = k$ und $x = -k$ gelegenen Raume besteht das Bild aus unendlich vielen Quellen, die man in allen Punkten $(x, y, z) = (\pm 2nk + (-1)^n a, b, c)$ sich angebracht denken muss. Befindet sich die Flüssigkeit ausserhalb einer Kugel vom Radius a, so besteht das Bild einer Quelle von der Ergiebigkeit M, im Abstande c vom Centrum, aus einer Quelle von der Ergiebigkeit Ma/c in dem hinsichtlich der Kugel inversen Punkte und einer Linie von Senken, die sich von diesem Punkte aus nach dem Centrum hinzieht und mit

15) *Lamb*, Hydrodynamics, p. 68.

16) *Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1843) = Math. and Phys. Papers 1, p. 28 zeigte die Möglichkeit, die Methode der Bilder in der Hydrodynamik anwenden zu können. Eine entsprechende Theorie für die Elektrostatik entwickelte Sir *W. Thomson* in J. de math. 10 (1845), p. 364 = Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, p. 144.

der linearen Dichte M/a ausgestattet ist[17]). Ersetzt man die Quelle durch ein Quellpaar von der Stärke M', dessen Axe durch das Centrum der Kugel hindurchgeht, so ist das Bild ein im inversen Punkte gelegenes Quellpaar von der Stärke $M'a^3/c^3$ mit derselben Axe und entgegengesetztem Sinn[18]). Bei zweidimensionaler Bewegung besteht das Bild einer Quelle, die sich ausserhalb eines Kreises befindet, aus einer gleichen Quelle in dem inversen Punkte zusammen mit einer numerisch gleichen Senke im Mittelpunkte[19]).

Es existieren analoge Theoreme für Singularitäten innerhalb einer beliebigen geschlossenen Oberfläche. Dabei muss für letztere selbstverständlich die Bedingung erfüllt sein, dass die Summe der Ergiebigkeiten aller Quellen innerhalb der Oberfläche verschwindet.

1e. Strömen in zwei Dimensionen. Bei zweidimensionaler Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit existiert stets eine Stromfunktion ψ,[20]) für welche

$$u = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \qquad v = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \tag{1}$$

ist. Die Differenz der Werte von ψ in zwei Punkten ist das Maass für das Flüssigkeitsquantum, das über eine beliebige Kurve, welche die beiden Punkte verbindet, hinüberströmt[21]). Sind Quellen vorhanden, so ist ψ mehrwertig; sein Wert wächst bei jedem vollen im positiven Sinn erfolgenden Umlauf um die Quelle von der Ergiebigkeit M um den Betrag $2\pi M$.

Ist die Bewegung wirbelfrei, so ist $\varphi + i\psi$ eine Funktion von $x + iy$.[20]). Wir bezeichnen die komplexen Variabeln $\varphi + i\psi$ und $x + iy$ weiterhin mit w und z. Jede funktionelle Abhängigkeit zwischen w und z entspricht einer zweidimensionalen Flüssigkeitsbewegung. Die Beziehungen $w = m \log z$ und $w = -im\pi^{-1} \log z$ liefern eine Quelle bezw. einen isolierten Wirbel[22]) im Anfangspunkte (die Ergiebigkeit bezw. Stärke ist m). Die Bewegung, welche von

17) *W. M. Hicks*, Lond. Phil. Trans. 171 (1880). Die Bewegung, welche von einer Quelle und Senke im Innern eines Kugelsektors zwischen zwei Axialebenen herrührt, behandelte *G. C. Calliphronas*, Mess. of math. (2) 18 (1889).

18) *Stokes*, Brit. Assn. Rep. 1847 = Math. and Phys. Papers 1, p. 230.

19) Dies Resultat verdankt man *G. Kirchhoff*, Ann. Phys. Chem. 64 (1845) = Ges. Abh., Leipzig 1882, p. 1.

20) *Lagrange*, Berl. Mém. (2) 12 (1781); *Stokes*, Cambr. Phil. Trans. 7 (1842) = Papers 1, p. 1. Vgl. IV 14, Nr. 7.

21) *W. J. M. Rankine*, Lond. Phil. Trans. 154 (1864).

22) Wegen der Definition eines isolierten *Wirbels* und seiner *Stärke* siehe Nr. 3b unten.

einer Anzahl Quellen herrührt, wird durch $w = \sum_{r=1}^{n}{}' m_r \log(z - z_r)$ gegeben; wenn

$$|m_1| = |m_2| = \cdots$$

ist, sind die Stromlinien Kurven n^{ten} Grades[23]).

Die Flüssigkeitsbewegung, welche von gegebenen Singularitäten in einem gegebenen Gebiet herrührt, kann aus der gleichen Bewegung in einem andern Gebiet durch konforme Abbildung abgeleitet werden[24]). Man nehme an, $Z = f(z)$ bilde ein Gebiet der z-Ebene konform auf ein Gebiet der Z-Ebene ab, und w sei als Funktion von Z für eine Bewegung, die von irgend welchen Singularitäten in dem zweiten Gebiet herrührt, bekannt. Drückt man alsdann durch Elimination von Z w als Funktion von z aus, so ist der reelle Teil von w das Geschwindigkeitspotential derjenigen Bewegung in dem entsprechenden Gebiet der z-Ebene, die von den entsprechenden Singularitäten herrührt. Die Ergiebigkeit bezw. Stärke der entsprechenden Quellen und Wirbel ist in den beiden Ebenen die gleiche[24]).

Ist im besondern das Gebiet der $Z = (X + iY)$-Ebene die Halbebene, in der Y positiv ist, und enthält das als einfach zusammenhängend angenommene Gebiet der z-Ebene den Punkt $z = \infty$, so mögen wir mit Z_0 und Z_∞ die Punkte in der Halbebene Z bezeichnen, welche den Punkten z_0 und ∞ des vorgegebenen Gebietes entsprechen; zugleich schreiben wir Z_0' und Z_∞' für die konjugiert imaginären Werte von Z_0 und Z_∞. Die Bewegung, die von einer in z_0 gelegenen Quelle herrührt, ist dann durch die Gleichung

$$w = m \log \frac{(Z - Z_0)(Z - Z_0')}{(Z - Z_\infty)(Z - Z_\infty')} \tag{2}$$

bestimmt. Haben wir einen Wirbel in z_0, so wird die Gleichung

$$w = -\frac{im}{\pi} \log \frac{Z - Z_0}{Z - Z_0'}. \tag{3}$$

Der Wirbel im Punkte (x_0, y_0) bewegt sich mit den Geschwindigkeitskomponenten

$$\frac{m}{2\pi}\left(\frac{\partial}{\partial y_0}, -\frac{\partial}{\partial x_0}\right) \log\left\{Y_0 \left|\frac{dz}{dZ}\right|_0\right\}. \tag{4}$$

Seine Bahn ist hierdurch bestimmt[24]). Als Beispiele führen wir an, dass, wenn die Grenze aus zwei parallelen Geraden $y = 0$ und $y = c$ besteht, die Transformation durch $Z = \exp(cz, \pi)$ bewerkstelligt wird;

---

23) *W. R. Smith*, Edinb. Roy. Soc. Proc. 7 (1870).
24) *E. J. Routh*, Lond. Math. Soc. Proc. 12 (1881).

für zwei Gerade $y = 0$ und $y = x \tan(\pi/n)$ setzen wir $Z = z^n$, für eine kreisförmige Begrenzung $z/a = \frac{(i - Z)}{(i + Z)}$.[25])

Erfolgt die Bewegung in dem Gebiete der z-Ebene ausserhalb einer einzelnen geschlossenen Kurve C, die sich selber nicht durchsetzt, und sind keine Singularitäten in diesem Gebiet vorhanden, so kann man die Bewegung so ansehen, als ob sie von Singularitäten innerhalb C und der in der Richtung ihrer Normalen gemessenen Verschiebung von C hervorgerufen würde. Es sei r der Abstand eines Punktes z von einem festen Punkt O innerhalb C. Dann existiert eine Funktion X, welche ausserhalb C harmonisch, auf C selber konstant ist und ausserdem die Gleichung

$$\lim_{r=\infty} (X - \log r) = 0$$

befriedigt[26]). Diese Funktion ist aus obigen Bedingungen eindeutig bestimmt und für alle Lagen von O innerhalb von C dieselbe. Sie repräsentiert das Potential der dem Gesamtbetrage -2π entsprechenden „natürlichen Belegung" von C. Die Kurven $X = \text{const.}$ schneiden sich in dem Gebiete ausserhalb C weder selbst noch einander. X_0 sei der Wert von X auf C, Y die konjugierte Funktion von X. Die Funktion Y ist in dem Gebiet ausserhalb C cyklisch harmonisch, ihre cyklische Konstante ist 2π. Wir setzen $Z = X + iY$ und $Z_1 = e^Z$. Die Beziehung zwischen z und Z_1 bildet das ausserhalb von C gelegene Gebiet der z-Ebene auf das ausserhalb eines Kreises gelegene Gebiet der Z_1-Ebene konform ab. Der Kreis ist durch die Gleichung $|Z_1| = e^{X_0}$ gegeben. Die Beziehung zwischen z und Z bildet dasselbe Gebiet der z-Ebene konform auf einen Teil eines Kreiscylinders vom Radius 1 ab. Dieser Teil des Cylinders wird von einem Normalschnitt begrenzt, $X - X_0$ ist der Abstand eines Punktes der Cylinderfläche von diesem Schnitt.

25) Spezielle Transformationen behandelt *Kirchhoff*, Mechanik, Vorlsg. 21. *A. G. Greenhill*, Quart. J. of math. 15 (1878), p. 10 wandte die Methode der Bilder auf zahlreiche Probleme an, die sich auf gerade Linien und Kreise beziehen; siehe auch *E. Jochmann*, Zeitschr. f. Math. 10 (1865); *A. G. Greenhill*, Quart. J. of math. 17 (1881), p. 284 und Lond. Math. Soc. Proc. 17 (1886), p. 375; *W. M. Hicks*, Quart. J. of math. 15 (1878), p. 313; *T. C. Lewis*, Mess. of math. (2) 9 (1879); *A. J. C. Allen*, Quart. J. of math. 17 (1881); *A. E. H. Love*, Amer. J. of math. 11 (1888); *Andrade*, Paris C. R. 112 (1891). Wegen elliptischer Begrenzungen siehe *C. V. Coates*, Quart. J. of math. 15 (1878) und *W. M. Hicks*, Quart. J. of math. 17 (1881), p. 327. Wegen Cartesischer Ovale *A. G. Greenhill*, Quart. J. of math. 18 (1882).

26) Vgl. z. B. *A. Harnack*, Grundlagen der Theorie des logarithmischen Potentials, Leipzig 1887, p. 80.

Erfolgt die Flüssigkeitsbewegung in dem Gebiete der Z-Ebene, das ausserhalb von C liegt, so können wir

$$w = (2\pi)^{-1}(m - i\varkappa)\, z + w'$$

setzen, wo w' in diesem Gebiete einwertig ist. Es ist dann m die Gesamtströmung quer über diese Kurve C und $\varkappa$ die Cirkulation in einem diese Kurve umgebenden Umlaufe. Die durch w' repräsentierte Bewegung rührt von der Bewegung der Kurve C in Richtung der Normalen her; ihr Flächeninhalt bleibt dabei ungeändert. Wir setzen $w' = \varphi' + i\psi'$ und bezeichnen mit ds das Bogenelement der Kurve C. Die Normalkomponente der Geschwindigkeit in einem Punkte auf C ist eine gegebene Funktion von Y, welche die Periode 2π hat. Diese Normalkomponente ist $\frac{d\psi'}{ds}$. Der Wert von ψ' in einem Punkte auf C ist bis auf eine additive Konstante bestimmt. Man kann ihn als periodische Funktion von Y mit der Periode 2π ansehen. Diese Funktion laute in eine Fourier'sche Reihe entwickelt:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(a_n \cos nY + b_n \sin nY), \tag{5}$$

wir haben dann[27])

$$w' = \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(X-X_0)}(a_n \cos nY + b_n \sin nY). \tag{6}$$

Ist insbesondere der Wert von ψ' auf C $\mathfrak{u}y - \mathfrak{v}x$, so rührt die Flüssigkeitsbewegung von einer Translationsbewegung von C mit der Geschwindigkeit $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ her. Es möge w_1 der entsprechende Wert von w sein. Dann repräsentiert die Gleichung

$$w = (\mathfrak{u} - i\mathfrak{v})\, z - w_1$$

die Strömung der Flüssigkeit längs der festgehaltenen Kurve C. Die Geschwindigkeit des Stromes strebt in grosser Entfernung von C der Grenze $(\mathfrak{u}, \mathfrak{v})$ zu. Ist der Wert von ψ' auf C $-\frac{1}{2}\mathfrak{r}(x^2+y^2)$, so rührt die Bewegung von einer mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{r}$ erfolgenden Rotation der Kurve C her.

Für einen Kreis, der mit der Geschwindigkeit $\mathfrak{u}$ parallel der x-Axe sich fortbewegt, ist $w = -\mathfrak{u}a^2 z^{-1}$,[28]) wo a der Radius des Kreises ist (der Anfangspunkt liegt im Mittelpunkte). Für eine

27) Diese Theorie ist eine Verallgemeinerung der von *Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1843), p. 105 (Papers 1, p. 17) für konzentrische, kreisförmige Grenzen gegebene. Was Gebiete angeht, welche von nichtkonzentrischen Kreisen begrenzt sind, siehe Fussnoten 80 und 90.

28) *Stokes* (Fussn. 27). Wegen der Bahnen der Teilchen siehe *Maxwell*, Lond. Math. Soc. Proc. 3 (1870), p. 82 = Scientific Papers 2, Cambr. 1890, p. 208.

Ellipse $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$, die sich mit den Geschwindigkeiten $\mathfrak{u}$, $\mathfrak{v}$ parallel zu den Axen fortbewegt und mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{r}$ um das Centrum rotiert, setzen wir $z = (a^2 - b^2)^{1/2} \cosh Z$ und haben dann

$$(7) \qquad w = -(\mathfrak{u}b + i\mathfrak{v}a)\left(\frac{a+b}{a-b}\right)^{1/2} e^{-Z} - \frac{1}{4} i\mathfrak{r}(a+b)^2 e^{-2Z}.^{29})$$

Eine ähnliche Methode kann angewandt werden, um die Flüssigkeitsbewegung innerhalb einer geschlossenen Kurve, die durch Bewegung dieser Kurve hervorgerufen wird, zu bestimmen[30]). Rotiert die Grenze mit der Winkelgeschwindigkeit $\mathfrak{r}$ um den Anfangspunkt, so hat die Stromfunktion an der Grenze der Bedingung

$$(8) \qquad \psi = -\frac{1}{2}\mathfrak{r}(x^2 + y^2) + \text{const.}$$

zu genügen[31]). Für eine Ellipse, welche eine inkompressible Flüssigkeit enthält, haben wir

$$(9) \qquad w = -\frac{1}{2} i\mathfrak{r}\frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2} z^2.$$

---

29) Die Resultate für die Ellipse wurden aus dem für das Ellipsoid geltenden Resultat von *E. Beltrami*, Bol. Mem. (3) 3 (1873), abgeleitet. Die Stromfunktion für Rotation wurde von *N. M. Ferrers*, Quart. J. of math. 13 (1875), die vollständige Lösung von *H. Lamb*, Quart. J. of math. 14 (1877) gegeben. Flüssigkeitsbewegungen in einem von konfokalen Ellipsen begrenzten Gebiet und verschiedene Probleme, die sich auf die Bewegung eines elliptischen Cylinders in einer inkompressiblen Flüssigkeit beziehen, wurden von *A. G. Greenhill*, Quart. J. of math. 16 (1879) diskutiert. Lösungen für Kurven, die den Kegelschnitten invers sind, wurden von *A. B. Basset*, Quart. of J. math. 19, 20, 21 (1883—1886) gegeben; die Bedingungen, welche die Funktion Z beschränken, sind dabei allerdings nicht überall beachtet.

30) Die Bestimmung der geeigneten harmonischen Funktion kann Schwierigkeit verursachen. So sind im Falle der oben eingeführten elliptischen Koordinaten, $\cosh nX \cos nY$ und $\sinh nX \sin nY$ in allen Punkten innerhalb der Ellipse $X = \text{const.}$ harmonisch, es ist dies aber nicht mit $e^{\pm nX} \cos nY$ der Fall.

31) *Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1846), p. 409 und Papers 1, p. 188, auch p. 7 Fussn. Das Problem ist mathematisch identisch mit dem der Torsion eines elastischen Prismas, dessen Querschnitt dieselbe Begrenzung hat wie das von der Flüssigkeit eingenommene Gebiet; siehe *Thomson* and *Tait*, Nat. Phil. 2, p. 242. Das Resultat (9) scheint zuerst für das Torsionsproblem von *B. de Saint-Venant*, Paris C. R. 24 (1847), p. 847 gegeben zu sein. Lösungen für verschiedenartige Grenzen kann man in *Thomson* and *Tait*, Nat. Phil. 2, p. 244 ff. finden; siehe auch *Basset*, Hydrodynamics 1, Ch. 5 und *Lamb*, Hydrodynamics p. 95 ff. Für ein Rechteck wurde die Geschwindigkeit von *A. G. Greenhill*, Quart. J. of math. 15 (1878), p. 144 durch elliptische Funktionen ausgedrückt. Für einen Kreissektor siehe *A. G. Greenhill*, Mess. of math. (2) 8 (1877), p. 89 und (2) 10 (1880), p. 83. Für konfokale Ellipsen und Hyperbeln siehe *N. M. Ferrers*, Quart. J. of math. 17 (1881) und *L. G. N. Filon*, Lond. Phil. Trans. (A) 193 (1899).

Eine experimentelle Methode, um die Stromlinien einer entlang einer gegebenen Grenze stattfindenden zweidimensionalen Bewegung sichtbar zu machen, wurde von *H. S. Hele-Shaw* ersonnen[32]). Man lässt Ströme von gefärbter Flüssigkeit mit ungefärbter Flüssigkeit zusammen durch einen Raum zwischen zwei parallelen Glasplatten, in welchem sich ein Hindernis befindet, fliessen. Ist die Geschwindigkeit der eintretenden Flüssigkeit nicht zu gross, so werden die Stromlinien bald stationär und können photographiert werden. *Stokes*[33]) hat gezeigt, dass die mittlere Geschwindigkeit einer zähen Flüssigkeit, genommen über den kleinen Abstand der Platten, mit grosser Annäherung denselben Gesetzen folgt, wie die zweidimensionale Geschwindigkeit einer idealen Flüssigkeit.

Die Theorie der zweidimensionalen Strömungen kann auf andere Flächen als die Ebene durch die Methode der konformen Abbildung ausgedehnt werden[34]).

1f. Diskontinuierliche Bewegung. Die durch die bereits auseinandergesetzten Methoden gefundenen Lösungen erfüllen bisweilen nicht die physikalische Bedingung, dass der Druck in einer Flüssigkeit niemals negativ sein darf. Bei einer gleichförmigen Bewegung eines Kreiscylinders muss, um die durch die Gleichung $w = \mathfrak{u} a^2 z^{-1}$ dargestellte Bewegung möglich erscheinen zu lassen, der Druck im Unendlichen den Wert $\frac{3}{2}\varrho\mathfrak{u}^2$ überschreiten. Im andern Falle wird der Druck in der Nähe derjenigen Cylinderpunkte, die am weitesten von der Ebene $y = 0$ entfernt sind, negativ. Bei einer gleichförmigen Strömung einer inkompressiblen Flüssigkeit an einer Ellipse vorbei kann die Geschwindigkeit an den Enden der grossen Axe durch genügende Vergrösserung der Excentricität jeden angebbaren Wert übersteigen. Es kann somit kein Druckbetrag im Unendlichen verhindern, dass der Druck an den Enden der grossen Axe gegebenenfalls negativ wird. Dasselbe ist allemal der Fall, wenn die Grenze eine scharfe Ecke hat, die in die Flüssigkeit hineinragt[35]). Die Beobachtung

32) Lond. Inst. Naval Architects Proc. 1898 und Brit. Assn. Rep. 1898, p. 136.

33) Brit. Assn. Rep. 1898, p. 143.

34) *Lamb*, Hydrodynamics p. 114. Strömungen auf einer Kugel, die von der Bewegung einer Kugelkalotte herrühren, wurden von *E. Beltrami*, Ist. Lomb. Rend. (2) 11 (1878) behandelt. Ebensolche Bewegungen auf Riemann'schen Flächen und in mehrfach zusammenhängenden, ebenen Gebieten behandelte *W. Burnside*, Mess. of math. (2) 20 (1891), p. 144 und Lond. Math. Soc. Proc. 22 (1891), p. 346, 23 (1892), p. 87; auch *H. F. Baker*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 9 (1898), p. 381. Wegen weiterer Litteraturnachweise siehe II A 7 b, Fussn. 53.

35) *Lamb*, Hydrodynamics p. 100.

zeigt, dass bei einer wirklichen Flüssigkeitsbewegung, die an einem Hindernis vorbei erfolgt, allemal das Bestreben zur Bildung eines „toten Raumes“ hinter dem Hindernis vorhanden ist[36]).

Das Wesentliche an den genannten Phänomenen ist, dass sich eine ganz deutliche Oberfläche herstellt, die den rasch sich bewegenden Flüssigkeitsstrom von einer im wesentlichen ruhenden Flüssigkeitsmasse trennt[37]). Eine solche Trennungsfläche tritt insbesondere auch bei Flüssigkeitsstrahlen auf[37]). *Helmholtz* erkannte, dass Probleme, deren durch die gewöhnliche Methode erlangte Lösungen die physikalische Druckbedingung nicht erfüllen, andere Lösungen zulassen müssen, bei denen die Geschwindigkeit an bestimmten Oberflächen unstetig ist, und fand von dort aus die wahre Lösung eines ersten solchen Problems[37]). Im Anschlusse hieran entwickelte *G. Kirchhoff*[38]) eine allgemeine Methode, um derartige zweidimensionale Probleme in Fällen, wo die festen Grenzen von geraden Linien gebildet werden, zu untersuchen. Durch eine Modifikation dieser Methode[39]) ist es jetzt möglich, jedes Problem der von *Kirchhoff* angegebenen Art auf Integrale algebraischer Funktionen zurückzuführen.

Die Flüssigkeit fliesse in einem zweidimensionalen Gebiete, das teilweise von gegebenen, festen, geraden Linien, teilweise von freien Stromlinien begrenzt ist. Die Gestalt der freien Stromlinien ist unbekannt, aber *die Geschwindigkeit hat der Druckbedingung entsprechend entlang denselben eine konstante Grösse.* Wir schreiben

$$\zeta = \frac{dz}{dw} = \frac{1}{q} e^{i\mu},$$

sodass q die Grösse der Geschwindigkeit und μ der Winkel zwischen der Bewegungsrichtung und der positiven Richtung der x-Axe ist. Die Beziehung zwischen z und w, welche die Lösung des Problems giebt, kann als eine Beziehung zwischen ζ und w angesehen werden. Hier wird das Gebiet auf einer Seite einer bestimmten Grenze der ζ-Ebene konform auf ein bestimmtes Gebiet der w-Ebene abgebildet. Die Grenze in der w-Ebene besteht aus Teilen von geraden Linien $\psi = \text{const.}$, die Grenze in der ζ-Ebene aus Kreisbögen um den Anfangspunkt, die den freien Stromlinien entsprechen, und aus geraden Linien durch den Anfangspunkt, die den festen geradlinigen Grenzen entsprechen. *Kirchhoff*'s Methode besteht nun darin, diese Grenzen zu zeichnen und die Beziehung zwischen ζ und w als Aufgabe der kon-

36) Bemerkt von *Stokes*, Camb. Phil. Soc. Trans. 8 (1847), p. 533 = Math. and Phys. Papers 1, p. 310.

37) *Helmholtz*, Berl. Ber. 1868, p. 215 = Wiss. Abh. 1, p. 146.

38) J. f Math. 70 (1869) = Ges. Abh. p. 416; Mechanik, Vorlesung 22.

formen Abbildung zu behandeln, was eine Differentialgleichung zwischen z und w ergiebt. Die bereits genannte Modifikation[39]) besteht in der Einführung von $\log \zeta$ an Stelle von ζ. Wir setzen

$$\Omega = \log \zeta = \log q^{-1} + i\mu = \lambda + i\mu$$

und beachten, dass die Grenze in der Ω-Ebene aus geraden Linien $\mu = \text{const.}$ und $\lambda = \text{const.}$ besteht, sodass die Grenzen in der Ω- und w-Ebene beide geradlinig sind. Die Gebiete in diesen Ebenen, welche dem von der Flüssigkeit eingenommenen Gebiet in der z-Ebene entsprechen, können beide auf die Halbebene einer Hülfsvariabeln t[40]) konform abgebildet werden. So wird eine Beziehung zwischen Ω und w hergestellt, welche sich durch eine Differentialgleichung zwischen z und w ausdrückt.

Wenn ein Flüssigkeitsstrahl aus einer Öffnung in dem Boden eines tiefen, rechtwinkeligen Gefässes mit vertikalen Wänden ausfliesst[41]), so sind die Breiten d des Gefässes, k der Öffnung und c des Strahles durch die Gleichung

$$k = c\left\{1 + \frac{1}{\pi}\left(\frac{d}{c} - \frac{c}{d}\right)\operatorname{arc\,tang}\frac{2cd}{d^2 - c^2}\right\}$$

an einander gebunden. Für den Fall, dass die vertikalen Wände als unendlich weit von der Öffnung abstehend angesehen werden können[42]), ist der Kontraktionskoeffizient $\frac{\pi}{2+\pi}$. Wenn ein Mundstück in Gestalt einer nach innen hineinragenden Röhre vorhanden ist und der Boden und die Wände als unendlich weit von der Mündung abstehend angesehen werden können, ist der Kontraktionskoeffizient $\frac{1}{2}$. Dies ist das oben erwähnte von *Helmholtz* gelöste Problem[37]). Die Gestalt der freien Stromlinie kann dabei aus der Gleichung

---

39) *M. Planck,* Ann. Phys. Chem. (2) 21 (1884); *N. Joukowsky,* Mosk. math. Samml. 15 (1890); *J. H. Michell,* Lond. Phil. Trans. 181 (1890); *A. E. H. Love,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 7 (1891), p. 175. Die letzteren drei geben Lösungen zahlreicher Beispiele. *P. Molenbroek* (Fussn. 8) hat einige Fälle der Bildung von Strahlen in einer kompressiblen Flüssigkeit behandelt.

40) *E. B. Christoffel,* Ann. di mat. 1 (1867); *H. A. Schwarz,* J. f. Math. 70 (1869), p. 105 = Ges. math. Abh. 2, Berlin 1890, p. 63.

41) *J. H. Michell* (Fussn. 39).

42) *Kirchhoff* (Fussn. 38). Das Resultat ist auch richtig, wenn die Schwere nicht vernachlässigt wird, siehe *F. Kötter,* Arch. f. Math. (2) 5 (1887) und Berl. Phys. Verh. 6 (1887). Derselbe Autor hat (l. c.) gezeigt, wie man obere und untere Grenzen für den Kontraktionskoeffizienten im Falle einer Kreisöffnung erhält. Andere Beispiele freier Stromlinien (wobei die Flüssigkeiten nicht nur der Schwere, sondern auch Kapillarkräften unterworfen gedacht werden) findet man bei *N. Joukowsky,* Petersburg, phys.-chem. Ges. 23 (1891).

$$\frac{dz}{dt} = \frac{1 - i\sqrt{(t^2 - 1)}}{t^2(t + 1)}$$

bestimmt werden, t ist reell und $1 > t^{-1} > -1$.

Wenn ein Strom von unendlicher Breite durch eine gerade Linie von endlicher Länge aufgehalten wird[43]), so ist für den Einfallswinkel α die Lösung durch die Gleichungen

$$\frac{dw}{dt} = \frac{1}{2}(t - \cos\alpha), \qquad \frac{d\Omega}{dt} = \frac{i\sin\alpha}{(t - \cos\alpha)\sqrt{(t^2 - 1)}}$$

gegeben. Die Einheiten sind so gewählt, dass die Länge der Linie $1 + \frac{1}{4}\pi\sin\alpha$, und die Geschwindigkeit des Stromes im Unendlichen 1 ist. Der Drucküberschuss auf der einen Seite gegen den Strom ist $\frac{1}{4}\pi\varrho\sin\alpha$. Das Druckcentrum befindet sich in einem Abstande $\frac{3\cos\alpha}{4(4 + \pi\sin\alpha)}\,l$ vom Mittelpunkt der eingeschalteten Linie nach dem dem Strome zugewendeten Ende hin, l bedeutet dabei die Länge der Linie. Die freie Stromlinie ist durch die Gleichung

$$\frac{dz}{dt} = \tfrac{1}{2}\{1 - t\cdot\cos\alpha - i\sqrt{(t^2 - 1)}\sin\alpha\}$$

gegeben, wo t reell und > 1 ist.

Die Methode von *Kirchhoff* ist in ihrer ursprünglichen Form auf verschiedene Probleme von *M. Réthy*[44]) und *D. Bobylew*[45]) angewandt worden. Die Anwendung auf Probleme von sich treffenden Strahlen ist von Lord *Rayleigh*[46]) und *W. Voigt*[47]) gemacht worden. Die modifizierte Methode wenden *J. H. Michell*[39]) und *H. C. Pocklington*[48]) auf die Bestimmung der Formen von Hohlwirbeln (Nr. **3** c unten) an. Sie ist von *B. Hopkinson*[49]) auf Fälle ausgedehnt worden, in denen Quellen und Senken in der Flüssigkeit existieren. Diskontinuierliche Bewegungen in drei Dimensionen oder mit festen Grenzen von gekrümmter Form sind nur erst in wenigen Fällen erhalten worden[50]).

---

43) Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 2 (1876), p. 430 = Scientific Papers 1, p. 267. Die Lösung wurde zuerst von *G. Kirchhoff* (Fussn. 38) erhalten.

44) Math. Ann. 46 (1895).

45) Petersburg, phys.-chem. Ges. 13 (1881) und Beiblätter zu Ann. Phys. Chem. 6 (1881); *Lamb,* Hydrodynamics p. 112.

46) Phil. Mag. (5) 1 (1876), p. 441 = Scientific Papers 1, p. 297.

47) Gött. Nachr. 1885, p. 285 und Math. Ann. 28 (1886).

48) Cambr. Phil. Soc. Proc. 8 (1894).

49) Lond. Math. Soc. Proc. 29 (1898).

50) Siehe *P. Molenbroek,* Ann. Phys. Chem. 52 (1894); *J. Weingarten* hat in den Gött. Nachr. 1890 ein Beispiel gegeben, bei welchem die freie Grenzfläche die Form eines zwischen zwei Erzeugenden gelegenen Stücks eines einschaligen

1g. Dreidimensionale Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit. Findet die Bewegung einer Flüssigkeit in Ebenen durch die z-Axe statt, so wählen wir ϖ als den Abstand eines Punktes von der Axe und schreiben v und w für die Geschwindigkeitskomponenten in den Richtungen ϖ und z. Dann existiert, einerlei ob die Bewegung wirbelfrei ist oder nicht, eine Stromfunktion ψ,[51]) für welche

$$(1) \qquad v = \frac{1}{\varpi}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad w = -\frac{1}{\varpi}\frac{\partial \psi}{\partial \varpi}$$

ist. Wir wählen zwei Punkte in der Flüssigkeit und konstruieren eine Rotationsfläche dadurch, dass wir eine die beiden Punkte verbindende Kurve um die z-Axe rotieren lassen. Es wird dann das in der Zeiteinheit über diese Oberfläche austretende Flüssigkeitsquantum gleich der Differenz der Werte von $2\pi\psi$ in den beiden Punkten. Ist die Bewegung wirbelfrei, so genügt ψ der Gleichung

$$(2) \qquad \frac{\partial^2 \psi}{\partial \varpi^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\varpi}\frac{\partial \psi}{\partial \varpi} = 0.$$

Wenn wir in diesem Falle das zugehörige Geschwindigkeitspotential φ in eine Reihe nach Kugelfunktionen in der Form

$$\varphi = \frac{a_0}{r} + \sum_{n=1}^{\infty} \{a_n r^n + b_n r^{-(n+1)}\} P_n(\cos\vartheta)$$

entwickeln, haben wir[52])

$$(3) \qquad \psi = -a_0 \cos\vartheta + \sin\vartheta \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{a_n}{n+1} r^{n+1} - \frac{b_n}{n} r^{-n}\right) \frac{dP_n}{d\vartheta}.$$

Die Bewegung einer Flüssigkeit im Innern eines Ellipsoids mit den Halbaxen a, b, c, welches um seinen Mittelpunkt mit einer Winkelgeschwindigkeit $(\mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r})$ rotiert (bezogen auf die Hauptaxen), wird durch Verallgemeinerung des Resultates (9) in Nr. 1e erhalten. Die Bahnen der Teilchen relativ zu der Grenze sind Ellipsen, die sämtlich in der periodischen Zeit[53])

$$\frac{\pi}{\left\{\mathfrak{p}^2 \frac{b^2c^2}{(b^2+c^2)^2} + \mathfrak{q}^2 \frac{c^2a^2}{(c^2+a^2)^2} + \mathfrak{r}^2 \frac{a^2b^2}{(a^2+b^2)^2}\right\}^{1/2}}$$

Hyperboloids hat. *H. J. Sharpe*, Edinb. Roy. Soc. Proc. 14 (1885), Quart. J. of math. 22 (1887) und Cambr. Phil. Soc. Proc. 7 (1891), giebt einige angenäherte Lösungen. Lord *Kelvin* hat betreffs der Gültigkeit der zweidimensionalen Theorie Zweifel geäussert, Nature 50 (1894), p. 524, 549, 573, 597.

51) IV 14, Nr. 7. Die axiale Stromfunktion wurde von *Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 7 (1842), p. 439 = Papers 1, p. 1 eingeführt, wo er die Gleichung (2) giebt.

52) *Lamb*, Hydrodynamics p. 136.

53) Das Resultat schreibt man *Maxwell* zu, siehe *Hicks*, Report, 1882.

beschrieben werden. Mithin ist die in dieser Zeit erfolgte Lagenänderung gleichbedeutend mit einer Rotation eines starren Körpers (obwohl die Flüssigkeitsbewegung selbst wirbelfrei ist). Die Flüssigkeitsbewegung, welche von etwaigen Gestaltsänderungen der ellipsoidischen Begrenzung herrührt, ist von *C. A. Bjerknes*[54]) untersucht worden. Bleibt das Ellipsoid sich selbst ähnlich und befindet sich die Flüssigkeit ausserhalb desselben, so ist

$$(4) \qquad \varphi = -\frac{1}{2a}\frac{da}{dt}\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\vartheta}{\left\{\left(1+\frac{\vartheta}{a^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{b^2}\right)\left(1+\frac{\vartheta}{c^2}\right)\right\}^{1/2}},$$

unter ε die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\varepsilon}+\frac{y^2}{b^2+\varepsilon}+\frac{z^2}{c^2+\varepsilon}=1$$

verstanden. Wenn sich die Flüssigkeit innerhalb einer ellipsoidischen Begrenzung befindet, welche ihre Gestalt, aber nicht ihr Volumen ändert, so ist

$$(5) \qquad \varphi = \frac{1}{2}\left\{\frac{x^2}{a}\frac{da}{dt}+\frac{y^2}{b}\frac{db}{dt}+\frac{z^2}{c}\frac{dc}{dt}\right\}.$$

Die Bewegung einer in einem Parallelepiped eingeschlossenen Flüssigkeit, welche von Quellen und Senken herrührt, ist von *A. G. Greenhill*[55]) bestimmt worden. Die Theorie der Strömung an einer Kugelkalotte vorbei ist von *A. B. Basset*[56]) behandelt worden.

2. Bewegung fester Körper in einer inkompressiblen Flüssigkeit.

2a. Kinematik. Bewegung einer Kugel. Zahlreiche Untersuchungen über wirbelfreie Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit in drei Dimensionen hängen eng mit dem Problem des Widerstandes zusammen, den die Flüssigkeit auf einen sich in ihr bewegenden Körper ausübt. Wir wollen zunächst die Flüssigkeit nach innen durch die Oberfläche des gegebenen Körpers begrenzt, sonst aber unbegrenzt annehmen. Der von der Flüssigkeit eingenommene Raum möge einfach zusammenhängen. Die in der Flüssigkeit durch die Bewegung des Körpers hervorgerufene Bewegung ist acyklisch und wirbelfrei. Wir wählen den Anfangspunkt und die Axen relativ fest

54) Gött. Nachr. 1873, p. 448, 829; siehe auch *Lamb*, Hydrodynamics, p. 145—166.

55) Cambr. Phil. Soc. Proc. 3 (1878), p. 289.

56) Lond. Math. Soc. Proc. 16 (1885) und Hydrodynamics 1, p. 147.

zum Körper und bezeichnen mit $\mathfrak{u}, \mathfrak{v}, \mathfrak{w}, \mathfrak{p}, \mathfrak{q}, \mathfrak{r}$ die Komponenten der linearen und Winkelgeschwindigkeit des Körpers. Das Geschwindigkeitspotential hat dann die Form[57])

$$(1) \qquad \varphi = \mathfrak{u}\varphi_1 + \mathfrak{v}\varphi_2 + \mathfrak{w}\varphi_3 + \mathfrak{p}\chi_1 + \mathfrak{q}\chi_2 + \mathfrak{r}\chi_3,$$

wo $\varphi_1, \ldots, \chi_3$ harmonische Funktionen in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raume sind und an der Oberfläche des Körpers den Bedingungen

$$(2) \qquad \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu} = \cos(\nu x), \ldots, \qquad \frac{\partial \chi_1}{\partial \nu} = y\cos(\nu z) - z\cos(\nu y), \ldots$$

genügen. Die Normale $d\nu$ ist nach dem Innern der Flüssigkeit gezogen.

Für eine Kugel vom Radius a ist $\varphi_1 = -\frac{1}{2}a^3 x r^{-3}, \ldots$, wo $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ ist und der Anfangspunkt im Kugelmittelpunkt liegt[58]). Es ist somit die Flüssigkeitsbewegung dieselbe wie die, welche durch ein im Kugelmittelpunkte gelegenes Quellpaar bedingt ist[18]). Der resultierende Druck auf die Kugel besteht aus zwei superponierten Drucken[58]): 1) aus dem Drucke, den die äusseren auf die Flüssigkeit wirkenden Kräfte hervorrufen (sein Wert ist derselbe wie für ein in Ruhe befindliches System[59]), 2) aus einer Kraft von der Grösse $\frac{1}{2}m'f$, wo m' die Masse der verdrängten Flüssigkeit und f die Beschleunigung des Kugelmittelpunktes ist. Diese Kraft wirkt durch das Centrum der Kugel in der zu f entgegengesetzten Richtung. Im Falle dass äussere Kräfte nicht vorhanden sind, schreitet die Kugel gleichförmig vorwärts. Dabei ist der Druck nur dann überall positiv, wenn der Druck im Unendlichen den Wert $\frac{5}{8}\varrho(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2+\mathfrak{w}^2)$ überschreitet[60]). Ist das äussere Kraftfeld homogen und von der Intensität g, so bewegt sich der Kugelmittelpunkt wie ein Massenpunkt bei Einwirkung einer gleichförmigen Beschleunigung $\frac{m-m'}{m+\frac{1}{2}m'}g$ (unter m die Masse der Kugel verstanden), beschreibt also eine Parabel. Dieses Resultat lässt sich (mit geeigneter Änderung des Nenners $m+\frac{1}{2}m'$) auf einen beliebigen isotropen Körper (Nr. 2c unten) ausdehnen[61]).

57) *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 71 (1870), p. 237 = Ges. Abh. p. 376.

58) *Poisson*, Paris, Mém. de l'Acad. 11 (1832). Später unabhängig von *P. G. L. Dirichlet* gefunden, Berl. Ber. 1852. *E. Riecke* giebt in den Gött. Nachr. 1888 für die Bahnen der Teilchen eine Zeichnung.

59) Dieses Resultat gilt auch für einen nicht-sphärischen Körper.

60) Sir *W. Thomson*, Lond. Roy. Soc. Proc. 42 (1887) und Phil. Mag. (5) 23 (1887), p. 255, diskutiert die Flüssigkeitsbewegung, wenn die Druckbedingung nicht erfüllt ist.

61) *F. Kötter*, Berl. Phys. Verh. 6 (1887), p. 93. Wegen eines andern inte-

Für ein Ellipsoid $x^2/a^2 + y^2/b^2 + z^2/c^2 = 1$ haben wir

$$(3) \qquad \varphi_1 = -\frac{A}{B_0 + C_0}\, x, \ldots,$$

$$(4) \qquad \chi_1 = -\frac{(b^2 - c^2)(C - B)}{(b^2 - c^2)(A_0 + B_0 + C_0) - (b^2 + c^2)(C_0 - B_0)}\, yz, \ldots,$$

wo A das Integral $\int_{\varepsilon}^{\infty} \frac{d\vartheta}{(a^2+\vartheta)^{3/2}(b^2+\vartheta)^{1/2}(c^2+\vartheta)^{1/2}}$ bezeichnet; B und C werden durch Vertauschung von b und c mit a erhalten; ε ist die positive Wurzel der Gleichung

$$\frac{x^2}{a^2+\varepsilon} + \frac{y^2}{b^2+\varepsilon} + \frac{z^2}{c^2+\varepsilon} = 1;$$

A_0, B_0, C_0 sind die Konstanten, die man durch Substitution von Null für ε in A, B, C erhält[62]). Die Gleichungen für die Stromlinien wurden von *A. Clebsch*[62]) und *R. A. Herman*[63]) diskutiert. Der spezielle Fall eines Sphäroids wurde von *G. Kirchhoff*[64]) betrachtet.

2b. **Kinetische Energie.** Die kinetische Energie T_1 der in einer unbegrenzten Flüssigkeit stattfindenden Bewegung, welche von der Bewegung eines einzelnen starren Körpers in der Flüssigkeit herrührt, kann, falls keine Cirkulation stattfindet, als homogene quadratische Form der sechs Geschwindigkeitskomponenten **u, v, w, p, q, r** ausgedrückt werden. Die Koeffizienten in $2T_1$ hängen von den Formeln für $\varphi_1, \ldots, \chi_3$ ab. Z. B.[57]) ist der

$$\text{Koeffizient von } \mathbf{u}^2 = -\varrho \iint \varphi_1 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}\, dS,$$

$$\text{Koeffizient von } 2\mathbf{uv} = -\varrho \iint \varphi_1 \frac{\partial \varphi_2}{\partial \nu}\, dS = -\varrho \iint \varphi_2 \frac{\partial \varphi_1}{\partial \nu}\, dS.$$

Um den allgemeineren Fall, wo die Flüssigkeit nach aussen durch eine feste oder bewegliche, starre Oberfläche begrenzt ist und sich ein oder mehrere feste Körper im Innern der Flüssigkeit bewegen, wo ferner der von der Flüssigkeit eingenommene Raum die Zusammenhangszahl $n + 1$ besitzt, zu behandeln, nehmen wir die Lagen der Körper und der äusseren Grenze als durch m generalisierte Koordinaten

---

grablen Falls der unter Einwirkung äusserer Kräfte erfolgenden Bewegung siehe *B. Paladini*, Rom, Acc. dei Linc. Rend. 4 (1888).

62) Das Resultat (3) gab *G. Green*, Edinb. Roy. Soc. Trans. 13 (1833) = Math. Papers, London 1871, p. 313, und das Resultat (4) *A. Clebsch*, J. f. Math. 52 (1856). Wegen der Bewegung zwischen konfokalen Ellipsoiden siehe *A. G. Greenhill*, Quart. J. of math. 16 (1879).

63) Quart. J. of. math. 22 (1889), p. 378.

64) Mechanik p. 219.

$q_1, q_2, \ldots, q_m$ bestimmt an; $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ seien die cyklischen Konstanten. Dann haben wir[65])

$$T_1 = \Pi_1 + K,$$

wo Π_1 eine homogene quadratische Funktion der generalisierten Geschwindigkeiten $q_1', q_2', \ldots, q_m'$ ist mit Koeffizienten, die nur von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ abhängen, und K eine homogene quadratische Funktion der Cirkulationen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, ebenfalls mit Koeffizienten, die nur von $q_1, q_2, \ldots, q_m$ abhängen. Das Geschwindigkeitspotential hat die Form

$$\varphi = \sum_{r=1}^{m} q_r' \varphi_r + \sum_{r=1}^{n} \varkappa_r \chi_r,$$

wo φ_r einer Bewegung entspricht, bei der $q_r' = 1$ und die übrigen q' und alle $\varkappa$ gleich Null sind; χ_r entspricht einer Bewegung, bei der $\varkappa_r = 1$ und die übrigen $\varkappa$ und alle q' verschwinden. Die Koeffizienten in $2\Pi_1$ drücken sich in derselben Weise aus, wie in dem oben betrachteten, einfacheren Falle. Die Koeffizienten in $2K$ erhalten in der Bezeichnung von Nr. 1b die Gestalt[66]):

$$\text{Koeffizient von } \varkappa_r^2 = \varrho \iint \frac{\partial \chi_r}{\partial \nu_r} d\omega_r,$$

$$\text{Koeffizient von } 2\varkappa_r \varkappa_s = \varrho \iint \frac{\partial \chi_r}{\partial \nu_s} d\omega_s = \varrho \iint \frac{\partial \chi_s}{\partial \nu_r} d\omega_r.$$

Der vollständige Ausdruck für die kinetische Energie T des Systems der starren Körper und der Flüssigkeit ist die Summe von T_1 und der kinetischen Energie T_0 der starren Körper allein. Die letztere ist ihrerseits wieder eine homogene quadratische Funktion der q'. Wir werden für $T_0 + \Pi_1$ einfach Π schreiben.

2c. **Hydrokinetische Symmetrie**[67]). Die Funktion T hat für einen einzelnen starren Körper, der sich in einer unbegrenzten Flüssigkeit bewegt, in welcher keine Cirkulation stattfindet, im allgemeinen 21 Koeffizienten. Doch reduziert sich diese Zahl, wenn der Körper irgendwelche Symmetrie zeigt. Für einen Körper, wie beispielsweise ein Ellipsoid, mit drei orthogonalen Symmetrieebenen, ist

$$2\mathsf{T} = A\mathbf{u}^2 + B\mathbf{v}^2 + C\mathbf{w}^2 + P\mathbf{p}^2 + Q\mathbf{q}^2 + R\mathbf{r}^2.$$

---

65) Sir *W. Thomson*, Edinb. Roy. Soc. Proc. 7 (1871), p. 384 und 668; Phil. Mag. (4) 42 (1871) und (4) 45 (1873).

66) *Lamb*, Motion of fluids, 1879; Hydrodynamics p. 207.

67) Sir *W. Thomson* (Fussn. 65); *Lamb*, Hydrodynamics p. 181; *J. Larmor*, Quart. J. of math. 20 (1884). Die Formel für einen Rotationskörper gaben *Thomson* and *Tait*, Nat. Phil. 1. ed. 1867, und hernach *Kirchhoff* (Fussn. 57).

Für einen Rotationskörper ist $A = B$, $P = Q$. Ist $A = B = C$ und $P = Q = R$, so heisst der Körper „isotrop". Für einen Körper mit schraubenförmiger Symmetrie um die z-Axe, derart, dass er nach Drehung durch einen rechten Winkel um diese Axe mit sich selbst identisch wird, kommt

$$2\mathsf{T} = A(\mathfrak{u}^2+\mathfrak{v}^2)+C\mathfrak{w}^2+P(\mathfrak{p}^2+\mathfrak{q}^2)+R\mathfrak{r}^2+2L(\mathfrak{p}\mathfrak{u}+\mathfrak{q}\mathfrak{v})+2N\mathfrak{v}\mathfrak{w}.$$

Wenn $A = C$, $P = R$ und $L = N$ wird, ist der Körper ein „isotroper Schraubenkörper".

2d. Bewegungsgleichungen. Die Bewegungsgleichungen für einen Körper, der sich in einer unbegrenzten Flüssigkeit bewegt, wurden für den Fall, dass keine Cirkulation und keine äusseren Kräfte wirksam sind, zuerst von *Thomson* und *Tait*[68]) aus dem Ausdruck für T durch direkte Anwendung der *Lagrange*'schen Gleichungen abgeleitet. Gegen dieses Verfahren wurde bald hernach Einspruch erhoben[69]), während *Kirchhoff* die Gleichungen aufs neue durch Rückgang auf das *Hamilton*'sche Prinzip ableitete[57]). Sie haben die Form

$$(1)\quad \begin{cases} \dfrac{d\xi_1}{dt} - \mathfrak{r}\eta_1 + \mathfrak{q}\zeta_1 = 0, & (3 \text{ Gleichungen}) \\ \dfrac{d\lambda_1}{dt} - \mathfrak{r}\mu_1 + \mathfrak{q}\nu_1 - \mathfrak{w}\eta_1 + \mathfrak{v}\zeta_1 = 0, & (3 \text{ Gleichungen}) \end{cases}$$

in denen

$$\xi_1 = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \mathfrak{u}}, \ldots, \qquad \lambda_1 = \frac{\partial \mathsf{T}}{\partial \mathfrak{p}}, \ldots.$$

Die Grössen ξ_1, η_1, ζ_1, λ_1, μ_1, ν_1 sind die Kraft- und Kräftepaarkomponenten derjenigen impulsiven Schraube, durch deren Angreifen am Körper die Bewegung des Systems von der Ruhelage aus erzeugt werden könnte. Diese Schraube heisst nach Sir *W. Thomson* der „Impuls"[70]).

Man hat versucht, die Anwendung der *Lagrange*'schen Gleichungen auf das Problem durch eine Theorie der „Ignorierung der Koordinaten"[71]) zu rechtfertigen, welche im wesentlichen mit der *Routh*schen Theorie der „modifizierten *Lagrange*'schen Funktion" überein-

---

68) Nat. Phil. 1. ed. 1867.

69) *L. Boltzmann*, J. f. Math. 73 (1871); *J. Purser*, Phil. Mag. (5) 6 (1878); *C. Neumann*, Hydr. Unt., 1883.

70) Die Theorie des „Impulses" gab Sir *W. Thomson*, Vortex-Motion. *Lamb*, Hydrodynamics p. 169 wendet sie direkt auf das Bewegungsproblem eines starren Körpers in einer Flüssigkeit an.

71) *Thomson* and *Tait*, Nat. Phil. 1, 2. ed. 1879; vgl. *Helmholtz*, J. f. Math. 97 (1884) = Wiss. Abh. 3, p. 119—202.

stimmt[72]). Nach dieser Theorie sind, wenn die Lage eines dynamischen Systems mit einer endlichen Zahl von Freiheitsgraden von zweierlei Koordinaten abhängt, von denen diejenigen zweiter Art nur mit ihren Geschwindigkeiten in den Ausdruck für die Energie eintreten, die zu diesen zweiten Koordinaten gehörigen Bewegungsgrössen (Impulskoordinaten) konstant. Mit Hülfe der linearen Gleichungen zwischen den Geschwindigkeitskoordinaten, welche die Konstanz dieser Bewegungsgrössen ausdrücken, können die Geschwindigkeiten der Koordinaten der zweiten Art aus den Bewegungsgleichungen für die Koordinaten der ersten Art eliminiert werden. Man sagt dann, die Koordinaten der zweiten Art seien „ignoriert" worden. Verschwinden insbesondere die Bewegungsgrössen, welche den ignorierten Koordinaten entsprechen, so kann das System durch Anwendung von Impulsen, die allein den Koordinaten erster Art entsprechen, zur Ruhe gebracht werden. Die Bewegungsgleichungen in diesen Koordinaten sind dann einfach diejenigen, welche durch direkte Anwendung der *Lagrange*'schen Gleichungen erlangt werden. Man nimmt nun an, dass dieser Ansatz auch bei dem hydrodynamischen Problem in Anwendung gebracht werden könne. Jedoch sind der Übergang von einer endlichen zu einer unendlichen Anzahl von Freiheitsgraden und die Schwierigkeit der Identifizierung der zu ignorierenden Koordinaten Umstände, welche die direkte Ableitung aus dem *Hamilton*'schen Prinzip annehmbarer erscheinen lassen[73]).

Bei dem allgemeinern Problem der Bewegung durchbohrter Körper machte Sir *W. Thomson*[65]), über das Gesagte hinausgehend, den weiteren Ansatz, dass er die Cirkulationen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots$ als generalisierte Bewegungsgrössen, wie sie bestimmten ignorierten Koordinaten entsprechen würden, ansah, und dann wieder die Bewegungsgleichungen eines Systems mit einer endlichen Anzahl von Freiheitsgraden auf das Problem anwandte. In diesem Falle ist die Notwendigkeit für eine direkte Ableitung aus dem *Hamilton*'schen Prinzip noch zwingender. Eine solche Ableitung gab *H. Lamb*[74]). Eine andere Methode[75]), diesen Gegenstand zu behandeln, ist folgende: Man bilde die Ausdrücke der resultierenden Kräfte und Kräftepaare, die auf einen starren Körper des Systems durch die Flüssigkeit ausgeübt werden, indem man die Druckgleichung (IV 15, Nr. **10**, Glg. (1)) benutzt.

72) *E. J. Routh*, Stability of motion, London 1877.

73) *C. Neumann*, Hydr. Unt., 1883.

74) Hydrodynamics p. 207. Siehe auch *J. Larmor*, Lond. Math. Soc. Proc. 15 (1884).

75) *G. H. Bryan*, Phil. Mag. (5) 35 (1893).

Bewegen sich die Körper und die Flüssigkeit unter Einwirkung irgendwelcher konservativer äusserer Kräfte, so nehmen wir U als die potentielle Energie des Systems in der durch die Koordinatenwerte $q_1, q_2, \ldots, q_m$ festgelegten Konfiguration und drücken T in der Form $\Pi + K$ aus (Nr. 2b oben). Dann haben wir für jede der Koordinaten q eine Gleichung[76]) von der Form

$$(2) \qquad \frac{d}{dt}\left(\frac{\partial \Pi}{\partial q_s'}\right) - \frac{\partial \Pi}{\partial q_s} + \frac{\partial K}{\partial q_s} + \sum_{r=1}^{n} \varkappa_r \sum_{s'=1}^{m} q_{s'}' \cdot (r, s, s') + \frac{\partial U}{\partial q_s} = 0,$$

wo (r, s, s') eine bestimmte Funktion der Koordinaten q bezeichnet, welche verschwindet, wenn $s' = s$ ist, und die ihr Zeichen ändert, wenn s und s' unter einander vertauscht werden. Diese Funktion drückt sich sehr einfach mit Hülfe der generalisierten Geschwindigkeiten $\varrho_1', \varrho_2', \ldots, \varrho_n'$ aus, welche den Bewegungsgrössen $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ entsprechen. Diese Geschwindigkeiten sind lineare Funktionen der q' und $\varkappa$ mit Koeffizienten, die nur von den q abhängen. Hiernach wird $-\frac{\partial \varrho_r'}{\partial q_s'}$ eine Funktion der q. Wir nennen sie ξ_{rs} und haben

$$(r, s, s') = \frac{\partial \xi_{rs}}{\partial q_{s'}} - \frac{\partial \xi_{rs'}}{\partial q_s}.$$

Die Geschwindigkeiten $\varrho_1', \varrho_2', \ldots, \varrho_n'$ sind die Strömungen durch die Öffnungen in den sich bewegenden Körpern[77]). Bezeichnet $\mathrm{u}_1, \mathrm{v}_1, \ldots, \mathrm{r}_1$ das Geschwindigkeitssystem des Körpers, in welchem sich die Öffnung befindet, deren Cirkulation wir $\varkappa_1$ nannten, bedeutet ferner $d\nu_1$ das Normalenelement für die zu dieser Cirkulation gehörende Querfläche, so haben wir

$$\varrho_1' = \varrho \iint \Big\{ \frac{\partial \varphi}{\partial \nu_1} - \cos(\nu_1 x)(\mathrm{u}_1 - \mathrm{r}_1 y + \mathrm{q}_1 z) - \cos(\nu_1 y)(\mathrm{v}_1 - \mathrm{p}_1 z + \mathrm{r}_1 x) - \cos(\nu_1 z)(\mathrm{w}_1 - \mathrm{q}_1 x + \mathrm{p}_1 y) \Big\} d\omega_1.$$

Was den Ausdruck von T in Impulskomponenten, was ferner die Wirkung einer Veränderung des Koordinatenanfangspunktes und der Axen angeht, so sei der Leser auf IV 13 verwiesen. Ebenda findet er Aufschluss über die in speziellen Fällen mögliche Integration der Gleichungen (1), sowie über die Theorie der stationären Bewegung und

76) Sir *W. Thomson,* Edinb. Roy. Soc. Proc. 7 (1871), p. 668 und Phil. Mag. (4) 45 (1873). Vgl. *Thomson* and *Tait,* Nat. Phil. 1, p. 320; *Lamb,* Hydrodynamics, p. 211; *C. Neumann,* Hydr. Unt. p. 63.

77) Sir *W. Thomson* (Fussn. 76); *A. B. Basset,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 6 (1887), p. 117.

der Stabilität der stationären Bewegung für den Fall, dass ein einzelner fester Körper sich in einer unbegrenzten Flüssigkeit ohne hinzutretende Cirkulation bewegt. Vom Standpunkt der Hydrodynamik liegt die Wichtigkeit der Resultate in der Thatsache, dass der Widerstand einer idealen Flüssigkeit gegen einen sich in ihr bewegenden Körper den Charakter einer Massenvermehrung[78]) hat, wobei der Betrag und die Lage der hinzugefügten Masse von der Bewegung und der Gestalt des Körpers abhängt.

2e. **Cyklische Bewegung.** Sir *W. Thomson*[76]) hat die Bewegung einer Kugel in einem mehrfach zusammenhängenden Raume mit fester Grenze untersucht, wenn der Radius der Kugel im Vergleich zum Abstande des Mittelpunktes von jedem Punkte der Grenze klein ist. In diesem Falle verschwinden alle Grössen (r, s, s') identisch und K hat die Form $-\frac{1}{2}\varrho\iint P'\frac{\partial P}{\partial \nu}\,dS$, wo die Integration über die Kugeloberfläche zu nehmen ist. P und P' bezeichnen hier resp. die Geschwindigkeitspotentiale derjenigen cyklischen Bewegungen, die eintreten, wenn die Kugel weggenommen wird, bezw. wenn sie festgehalten wird. Ist die Dichte der Kugel dieselbe, wie die der Flüssigkeit, und erfolgt die Cirkulation um einen in die Unendlichkeit laufenden, festgehaltenen, feinen Draht, so bewegt sich der Mittelpunkt so, als ob er von dem Drahte mit einer Kraft angezogen würde, die mit dem Kubus der Entfernung umgekehrt proportional ist. Lord *Rayleigh*[79]) und *A. G. Greenhill*[80]) haben die zweidimensionale cyklische Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit um einen sich bewegenden Kreiscylinder untersucht. Sind keine äusseren Kräfte vorhanden, so ist die Bahn des Mittelpunktes ein Kreis. Ist das äussere Kraftfeld homogen, so wird die Bahn des Mittelpunktes eine Trochoide. *A. B. Basset*[81]) dehnte die für einen Rotationskörper geltenden Integrationsresultate der Gleichungen (1) von Nr. 2d auf einen Ring mit einer durch seine Öffnung statthabenden Cirkulation aus. Das Geschwindigkeitspotential für die Bewegung eines Kreisringes parallel zu seiner Axe wurde mit Hülfe der zugehörigen harmonischen Funktionen (der sog. Toroidfunktionen) von *W. M. Hicks*[82]) dargestellt. Die cyklische Bewegung, welche um

78) *Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1843), p. 105 = Papers 1, p. 51.

79) Mess. of math. (2) 7 (1877) = Papers 1, p. 344.

80) Mess. of math. (2) 9 (1880). Wegen des entsprechenden Problems bei mehreren Cylindern siehe *A. B. Basset*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 6 (1887), p. 135.

81) Cambr. Phil. Soc. Proc. 6 (1887), p. 47; Hydrodynamics 1, p. 196. Die im Text erwähnten Integrationsresultate sind in IV 13 ausführlich besprochen.

82) Lond. Phil. Trans. 172 (1881). Siehe auch *F. W. Dyson*, Lond. Phil.

einen dünnen Ring herum stattfinden kann, wird durch dieselbe Formel gegeben, wie die Bewegung, welche von einem Wirbelring mit kleinem Querschnitt herrührt (Nr. 3b unten). Zwei solche Ringe scheinen auf einander mit Kräften derselben Grösse und Richtung zu wirken, wie die Kräfte zwischen zwei elektrischen Strömen[83]), nur haben die Kräfte bei den beiden Problemen entgegengesetzten Sinn[84]).

2f. **Bewegung zweier Kugeln.** Das Resultat (Nr. 2a oben), dass die Flüssigkeitsbewegung, welche von der Bewegung einer Kugel herrührt, dieselbe ist wie die, welche durch ein Quellpaar bedingt ist, ermöglicht es, die Methode der Bilder auf das Problem der Bewegung zweier Kugeln anzuwenden. *Stokes* hat zunächst die Bewegung bestimmt, welche von einer Kugel in einer von einer zweiten Kugel begrenzten Flüssigkeit in dem Augenblick hervorgerufen wird, wo die beiden Kugeln instantan konzentrisch sind[16]). Auch hat er die Bewegung eines Körpers, der von den äusseren Teilen zweier zu einander orthogonaler Kugeln begrenzt wird, unter der Voraussetzung bestimmt, dass sich der Körper parallel der Verbindungslinie der Centren bewegt[18]). In diesen Fällen ist die Anzahl der Bilder eine endliche. Auf das allgemeine Problem wandte dagegen *W. M. Hicks*[17]) die Methode der Bilder an. Bewegen sich die Kugeln in der Verbindungslinie der Centren mit den Geschwindigkeiten $\mathbf{u}$, $\mathbf{v}$, so kann die kinetische Energie in der Form $\frac{1}{2}(A\mathbf{u}^2 + B\mathbf{v}^2 + 2C\mathbf{uv})$ ausgedrückt werden, wo A, B, C bestimmte Funktionen der Radien a, b der Kugeln und des Abstandes c zwischen ihren Centren sind. Die Funktionen A, B, C werden von ihm durch Reihen dargestellt, die nach Potenzen von a/c und b/c fortschreiten. Ähnliche Resultate sind von *C. Neumann*[73]) durch Anwendung eines bestimmten Systems orthogonaler krummliniger Koordinaten erhalten worden. *R. A. Herman*[85]) gab eine kurze Formel für den n^{ten} Term der *Hicks*'schen Reihe, während *A. B. Basset*[86]) zeigte, wie man die Glieder der Reihe

---

Trans. (A) 184 (1893). Die in Rede stehenden Funktionen wurden zuerst von *C. Neumann*, Allgemeine Lösung des Problems über den stationären Temperaturzustand eines homogenen Körpers, welcher von zwei nichtkonzentrischen Kugelflächen begrenzt ist, Halle 1862, eingeführt.

83) *G. Kirchhoff*, J. f. Math. 71 (1870), p. 263 = Ges. Abh. p. 404; *L. Boltzmann*, J. f. Math. 73 (1871).

84) Sir *W. Thomson*, Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, p. 569 und 587. Siehe auch *E. Riecke*, Gött. Nachr. 1887, p. 505; *C. A. Bjerknes*, Acta math. 4 (1884).

85) Quart. J. of math. 22 (1887), p. 204, 370.

86) Lond. Math. Soc. Proc. 18 (1887); Hydrodynamics 1, p. 240.

annäherungsweise durch eine Verschiebung des Anfangspunktes eines Systems von Kugelfunktionen erhalten kann. Unterliegen die Kugeln keiner Einwirkung äusserer Kräfte, so wächst die relative Trennungsgeschwindigkeit beständig[87]). Führt die Kugel a von der Masse m kleine Pendelschwingungen aus, so wächst die Periode durch die Anwesenheit der Kugel b angenähert in dem Verhältnis

$$1 + \frac{3}{4} \frac{m'}{m + \frac{1}{2} m'} \frac{a^3 b^3}{c^6} : 1,$$

m' ist dabei die Masse der von der ersten Kugel verdrängten Flüssigkeit[88]). Erfolgt die Bewegung rechtwinkelig zur Verbindungslinie der Centren, so sind nur erst angenäherte Resultate erhalten worden[89]). Aber auch in diesem Falle hat *R. A. Herman*[85]) einen kurzen Ausdruck für die Koeffizienten der kinetischen Energie in einer symbolischen Form gegeben. Bewegt sich eine Kugel in Gegenwart einer festen Ebene, so wird sie von der Ebene abgestossen oder angezogen, je nachdem der Winkel, welchen ihre Bewegungsrichtung mit der Normalen der Ebene macht, zwischen α und $\pi - \alpha$ liegt oder nicht. α bezeichnet dabei die kleinste positive Wurzel der Gleichung

$$\tfrac{1}{2} \operatorname{tang} \alpha = \left(\frac{a^3 + 4 d^3}{a^3 + 8 d^3} \right)^{\frac{1}{2}},$$

d ist der Abstand des Centrums von der Ebene[89]). Die für Kugeln erhaltenen Resultate sind auf Cylinder von *W. M. Hicks*[90]) ausgedehnt worden, sowohl wenn eine Cirkulation der Flüssigkeit um sie herum stattfindet, wie auch nicht.

2g. **Pulsierende Kugeln.** Volumschwingungen einer Kugel rufen in einer Flüssigkeit ein Geschwindigkeitspotential derselben Art hervor, wie eine Quelle von veränderlicher Ergiebigkeit. Zwei Kugeln, die solche Schwingungen ausführen, bedingen infolge dessen Änderungen in dem hydrodynamischen Druck. Diese haben daher eine scheinbare Anziehung oder Abstossung zwischen den Kugeln zur

87) Dies Theorem wurde von *W. M. Hicks* (Fussn. 17) ausgesprochen und von *C. Neumann*, Hydr. Unt. bewiesen.

88) Solche Schwingungen wurden zuerst von *C. A. Bjerknes* (Fussn. 92) diskutiert und unabhängig von ihm von *F. Guthrie*, nach Sir *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 41 (1871), p. 405; siehe auch Reprint of Papers on Electrostatics and Magnetism, p. 571. Das hier ausgesprochene Resultat gab *W. M. Hicks* (Fussn. 17).

89) *W. M. Hicks* (Fussn. 17) und *A. B. Basset* (Fussn. 86).

90) Quart. J. of math. 16 (1879), p. 113, 193; 17 (1881), p. 194 und Cambr. Phil. Soc. Proc. 3 (1878), p. 227. Siehe auch *A. B. Basset* (Fussn. 80).

Folge. Die Grösse dieser Anziehung bezw. Abstossung ist dem Quadrate des Abstandes umgekehrt proportional, vorausgesetzt, dass der Abstand dabei gross im Vergleich zu den Radien angenommen wird. Es ergiebt sich eine Anziehung, wenn die Kugeln dieselbe Periode haben, und sich ihre Phasen um nicht mehr als ein Viertel der Periode unterscheiden[91]). Die Theorie der scheinbaren Kräfte zwischen pulsierenden und oscillierenden Kugeln in einer inkompressiblen Flüssigkeit wurde von *C. A. Bjerknes*[92]) in einer Reihe von Abhandlungen ausgebildet. *W. M. Hicks*[91]) hat darauf aufmerksam gemacht, dass das allgemeine Theorem von den scheinbaren Anziehungen und Abstossungen zwischen den Gliedern eines Systems von pulsierenden Kugeln auf ein System von pulsierenden, nichtsphärischen Körpern ausgedehnt werden kann. Derselbe wandte die Ergebnisse zum Aufbau einer Theorie der Gravitation im Anschluss an die Wirbelatomtheorie an; die Atome der Materie sind dabei als Hohlwirbel aufzufassen[93]). Die Fortpflanzung von Wellen durch eine kompressible, ein Aggregat von pulsierenden Kugeln enthaltene Flüssigkeit, betrachtete *A. V. Bäcklund*[94]).

3. Wirbelbewegungen.

3a. Transformationen der allgemeinen hydrodynamischen Gleichungen. Die Gleichungen wurden in IV 15, Nr. 8 in zwei Formen,

91) Dies Resultat wurde zuerst von *C. A. Bjerknes,* Christ. Förhandl. 1875 gefunden; siehe auch *W. M. Hicks,* Cambr. Phil. Soc. Proc. 3 (1878), p. 276 und 4 (1880), p. 29; einen einfachen Beweis gab *W. Voigt,* Gött. Nachr. 1891. Ähnliche Probleme für Ellipsoide sind von *K. Pearson,* Quart. J. of math. 20 (1884), p. 60, 184, behandelt.

92) Christ. Förhandl. 1863, 1868, 1871, 1875; Gött. Nachr. 1876. Wegen der experimentellen Untersuchungen von *Bjerknes* siehe Gött. Nachr. 1877; Paris C. R. 84, 88, 89 (1877—1879) und den von *Bertin,* Ann. chim. phys. (5) 25 (1882) gegebenen Bericht. Betreffs *Bjerknes*' Theorie siehe *V. Bjerknes*, Hydrodynamische Fernkräfte, Leipzig 1900. Die *Bjerknes*'schen Ideen sind der Gegenstand eines Referats in den Rapports présentés au Congrès de physique 1, Paris 1900; vgl. auch *A. Korn,* Theorie der Gravitation und der elektrischen Erscheinungen auf Grundlage der Hydrodynamik, Berlin 1898.

93) Wegen der Wirbelatome siehe Nr. **3**b unten; wegen des Begriffs von Hohlwirbeln siehe Nr **3**c. Die Abhängigkeit der Pulsationsperiode von der Translationsgeschwindigkeit (Nr. **3**e) ist für die in Rede stehende Theorie der Gravitation eine grosse Schwierigkeit; siehe *W. M. Hicks* (Fussn. 114).

94) Math. Ann. 34 (1889). Wegen der Fortpflanzung von Wellen durch ein aus Wirbelatomen gebildetes Mittel siehe *W. M. Hicks*, Brit. Assn. Rep. 1895, und Sir *W. Thomson,* Brit. Assn. Rep. 1887.

der *Euler*'schen bezw. der *Lagrange*'schen Form gegeben. Die *Euler*schen Gleichungen kann man folgendermassen schreiben[95])

$$(1)\quad \frac{\partial}{\partial t}(u, v, w) + 2(w\eta - v\zeta,\ u\zeta - w\xi,\ v\xi - u\eta) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) W',$$

wo

$$(2)\quad W' = V - \int \frac{dp}{\varrho} - \tfrac{1}{2} q^2$$

ist. In dieser Form gestatten sie eine unmittelbare Transformation auf beliebige orthogonale (krummlinige) Koordinaten[96]). Die Komponenten der Drehgeschwindigkeit genügen drei Gleichungen folgender Art[97])

$$(3)\quad \frac{\delta}{\delta t}\left(\frac{\xi}{\varrho}\right) = \frac{\xi}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\eta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\zeta}{\varrho}\frac{\partial u}{\partial z}, \ldots.$$

Man kann stets drei Funktionen φ, λ, Ω derart bestimmen, dass

$$(4)\quad u\,dx + v\,dy + w\,dz = d\varphi + \lambda d\Omega$$

ist und $\lambda = \text{const.}$, $\Omega = \text{const.}$ die Gleichungen für zwei Flächenscharen werden, die bei der Bewegung stets von denselben Teilchen gebildet werden[98]). Die Schnittlinien solcher Flächen ergeben die Wirbellinien (Nr. 3b unten). Drückt man die Geschwindigkeiten in dieser Weise aus, so wird die Druckgleichung[99])

$$(5)\quad V - \int \frac{dp}{\varrho} - \tfrac{1}{2} q^2 - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \lambda \frac{\partial \Omega}{\partial t} = F(t).$$

Wird die Bewegung auf Axen bezogen, die um den Anfangspunkt mit der Winkelgeschwindigkeit $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ rotieren, so mögen die Änderungsgeschwindigkeiten der Koordinaten eines auf die bewegten Axen bezogenen Teilchens mit u', v', w' bezeichnet werden, wo

$$(6)\quad u' = u + y\omega_3 - z\omega_2, \quad v' = v + z\omega_1 - x\omega_3, \quad w' = w + x\omega_2 - y\omega_1;$$

95) *Lagrange* (Fussn. 20).

96) IV 14, Nr. 20b.

97) *E. J. Nanson,* Mess. of math. (2) 3 (1874), p. 120. Die entsprechenden Gleichungen für inkompressible Flüssigkeiten leitete *Lagrange* (Fussn. 20) ab, unabhängig von ihm *Stokes*, Cambr. and Dubl. Math. J. 3 (1848) = Papers 2, p. 36. Auch *Helmholtz*, Wirbelbewegung.

98) *A. Clebsch,* J. f. Math. 54 (1857) und J. f. Math. 56 (1859), p. 1. Siehe auch *M. J. M. Hill*, Quart. J. of math. 17 (1881) und Cambr. Phil. Soc. Trans. 14 (1883). Bei *Clebsch* und auch bei *Hill* (1883) werden Gleichungen für die Bewegung einer Flüssigkeit in einem n-dimensionalen Raume aufgestellt. Betreffs der von λ in speziellen Fällen erfüllten Gleichungen siehe *M. J. M. Hill,* Lond. Phil. Trans. 175 (1884) und Lond. Math. Soc. Proc. 16 (1885). Wegen der Transformation (4) vgl. IV 14, Nr. 9.

99) Die Gleichung (5) gaben *Clebsch* und *Hill* (Fussn. 98). Siehe auch *J. Brill*, Quart. J. of math. 28 (1896).

es ist dann $\frac{\delta}{\delta t} = \frac{\partial}{\partial t} + u' \frac{\partial}{\partial x} + v' \frac{\partial}{\partial y} + w' \frac{\partial}{\partial z}$ zu setzen. Die *Euler*schen Gleichungen erhalten die Form [100])

$$\frac{\delta u}{\delta t} - v\omega_3 + w\omega_2 = \frac{\partial}{\partial x}\left(V - \int \frac{dp}{\varrho}\right). \tag{7}$$

Die *Lagrange*'schen Gleichungen können in der Form geschrieben werden

$$\frac{\delta^2 x}{\delta t^2}\frac{\delta x}{\delta x_0} + \frac{\delta^2 y}{\delta t^2}\frac{\delta y}{\delta x_0} + \frac{\delta^2 z}{\delta t^2}\frac{\delta z}{\delta x_0} = \frac{\delta}{\delta x_0}\left(V - \int \frac{dp}{\varrho}\right), \tag{8}$$

wo x_0, y_0, z_0 die anfänglichen Koordinaten eines Teilchens und x, y, z seine Koordinaten zur Zeit t sind. In dieser Form haben sie folgende drei Integrale [101])

$$\frac{\xi}{\varrho} = \frac{\xi_0}{\varrho_0}\frac{\delta x}{\delta x_0} + \frac{\eta_0}{\varrho_0}\frac{\delta x}{\delta y_0} + \frac{\zeta_0}{\varrho_0}\frac{\delta x}{\delta z_0}, \ldots. \tag{9}$$

Sie gestatten auch eine Integration durch Gleichungen folgender Art [102])

$$\frac{\delta x}{\delta t}\frac{\delta x}{\delta x_0} + \frac{\delta y}{\delta t}\frac{\delta y}{\delta x_0} + \frac{\delta z}{\delta t}\frac{\delta z}{\delta x_0} = \left(\frac{\delta x}{\delta t}\right)_0 + \frac{\delta \chi}{\delta x_0}, \tag{10}$$

wo

$$\frac{\delta \chi}{\delta t} = V - \int \frac{dp}{\varrho} + \tfrac{1}{2} q^2 \tag{11}$$

ist.

3b. Allgemeine Sätze über Wirbelsysteme. Die durch die Gleichungen

$$dx/\xi = dy/\eta = dz/\zeta$$

bestimmten Linien heissen die „Wirbellinien". Die Wirbellinien, welche die Punkte einer geschlossenen Kurve treffen, bilden eine „Wirbelröhre". Die Flüssigkeit in einer sehr engen Wirbelröhre bildet einen „Wirbelfaden". Das Produkt des Flächeninhalts eines Querschnitts in die für den letzteren geltende, resultierende Drehgeschwindigkeit ist die „Stärke" des Wirbelfadens. Die *Gesetze für die Wirbelbewegung* wurden von *Helmholtz* [5]) gegeben. Sie lauten: 1) die Wirbelfäden werden stets von denselben Teilchen gebildet, 2) die Stärke eines Wirbelfadens ist zu allen Zeiten und in allen Querschnitten dieselbe, 3) die Wirbelfäden müssen entweder in sich zurücklaufen oder ihr Ende an der Begrenzung haben.

Diese Gesetze sind die Fundamentaltheoreme der rationellen Hydrodynamik und schliessen den Satz ein, dass eine wirbelfreie Bewegung

100) *A. G. Greenhill*, Ency. Brit.

101) *A. L. Cauchy*, Paris, Mém. de l'Acad. 1 (1827). Siehe auch *Stokes* (Fussn. 97).

102) *H. Weber*, J. f. Math. 68 (1868).

stets wirbelfrei bleibt (Nr. 1a). Die Drehgeschwindigkeit hat in einem Punkte, in dem die Flüssigkeit wirbelt, allgemein zu reden, einen endlichen Wert. Es empfiehlt sich aber, auch Grenzfälle zu betrachten, in welchen isolierte Wirbelfäden von unendlich kleinem Querschnitt und endlicher Stärke auftreten. Man kann auch Wirbelfäden betrachten, die auf einer Oberfläche in der Weise verteilt sind, dass für jeden Punkt der Oberfläche das Produkt aus der Drehgeschwindigkeit und der in der Richtung der Flächennormale genommenen Dicke des Fadens einen endlichen Grenzwert hat. Solche Wirbelfäden bilden eine „Wirbelschicht". Oberflächen, an denen die Geschwindigkeit unstetig ist (Nr. 1f), sind Träger solcher Wirbelschichten[103]).

Wie auch die Verteilung der Wirbelfäden sein mag, die Flüssigkeitsbewegung lässt sich stets mittelst eines Geschwindigkeitspotentials und eines Vektorpotentials durch folgende Formel darstellen[104])

$$(u, v, w) = \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\varphi + \operatorname{curl}(F, G, H).$$

Ist die Flüssigkeit unbegrenzt und im Unendlichen in Ruhe und erstrecken sich die Wirbelfäden nicht ins Unendliche, so sind die Werte von φ und F, G, H in einem Punkte (x, y, z) durch die in allen anderen Punkten herrschende Dilatationsgeschwindigkeit Θ und die Drehgeschwindigkeit vermöge der Formeln[104])

$$\varphi = -\iiint \frac{\Theta'}{4\pi r}\, dx'\, dy'\, dz', \qquad F = \iiint \frac{\xi'}{2\pi r}\, dx'\, dy'\, dz', \ldots$$

gegeben, wo r den Abstand der beiden Punkte (x, y, z) und (x', y', z') bezeichnet. Haben wir eine feste oder sich bewegende Grenze, welche die Flüssigkeit umschliesst, so ist zu dem so bestimmten φ noch eine solche Lösung von $\Delta\varphi = 0$ hinzuzufügen, dass die Grenzbedingung erfüllt wird. Ein Wirbelfaden von der Stärke m liefert zu den Geschwindigkeitskomponenten in einem Punkte (x, y, z) Beiträge von der Form[5])

$$u = \frac{m}{2\pi}\int \left(\frac{z - z'}{r^3}\,\frac{dy'}{ds} - \frac{y - y'}{r^3}\,\frac{dz'}{ds}\right) ds, \ldots,$$

wo ds das Bogenelement des Wirbelfadens im Punkte (x', y', z') ist. In einem Punkte, in dem die Bewegung wirbelfrei ist, liefert ein Wirbelring (oder ein Wirbelfaden ohne Ende) von unendlich kleinem Querschnitt für das Geschwindigkeitspotential einen Beitrag $m\Omega/4\pi$, wo

---

103) *Helmholtz* (Fussn. 37); vgl. IV 14, Nr. 5.

104) IV 14, Nr. 10. *Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 9 (1849), p. 1 = Papers 2, p. 243; *Helmholtz*, Wirbelbewegung.

Ω der körperliche Winkel ist, den die von jenem Punkte nach dem Wirbelring hinlaufenden Strahlen umschliessen[105]).

Ist für eine inkompressible Flüssigkeit zu irgend einer Zeit die (notwendig solenoïdale) Verteilung der Drehgeschwindigkeit gegeben, so ist die instantane Geschwindigkeit der Flüssigkeitsteilchen, einerlei ob die Flüssigkeit begrenzt ist oder nicht, in jedem Punkte bestimmt, und es ändert sich die Drehgeschwindigkeit weiterhin mit der Zeit nach dem durch die Gleichungen (3) in Nr. 3a ausgedrückten Gesetz. Somit ist die Bewegung in jedem folgenden Zeitpunkt ebenfalls bestimmt. Da die Wirbelfäden sich mit der Flüssigkeit fortbewegen, so ist insbesondere auch die Bewegung der Wirbelfäden bestimmt und wird von Gleichungen beherrscht, aus denen alle Kräfte eliminiert sind[106]).

In einer unbegrenzten, inkompressiblen Flüssigkeit, in der irgendwelche Wirbelbewegung vorhanden ist, die sich nicht ins Unendliche erstreckt, wird die kinetische Energie durch die Formel[107])

$$\frac{\varrho}{2\pi}\iiint\iiint \frac{\xi\xi' + \eta\eta' + \zeta\zeta'}{r}\, dx\, dy\, dz\, dx'\, dy'\, dz'$$

ausgedrückt.

Man kann sich die Bewegung aus der Ruhe durch Einwirkung äusserer impulsiver Kräfte und impulsiver Drucke erzeugt denken. Bezeichnen wir die ersteren mit X', Y', Z' und den impulsiven Druck mit p_0, so haben wir Gleichungen von der Form

$$\varrho u = X' - \frac{dp_0}{dx},$$

wo wir p_0 noch auf unendlich viele Weisen wählen können. Wir nehmen eine Oberfläche S, die alle Wirbel umschliesst; es ist dann die Bewegung auf der Aussenseite wirbelfrei mit einem Geschwindigkeitspotential φ. Wir wählen ferner p_0 ausserhalb von S gleich $-\varrho\varphi$ und lassen den in der Richtung der Normalen genommenen Differentialquotienten von p_0 beim Durchschreiten der Fläche sich stetig ändern. Man bilde sich dann für das System der für die Punkte innerhalb von S geltenden Impulse X', Y', Z' die resultierende, impulsive Schraube, und suche den Grenzwert, dem diese Schraube zustrebt, wenn S sich bis ins Unendliche ausdehnt. Die so erhaltene resultierende Schraube wird kurzweg der „Impuls“[70]) genannt. Ihre

105) *Lamb*, Hydrodynamics p. 233.

106) Die allgemeine Bedeutung dieses Resultates erläutert *J. Larmor*, Nature 62 (1900), p. 454 = Brit. Assn. Rep. 1900, p. 624.

107) *Lamb*, Hydrodynamics p. 240.

Komponenten ξ_1, η_1, ξ_1, λ_1, μ_1, ν_1 sind durch Gleichungen folgender Form[108]) gegeben

$$\xi_1 = \varrho \iiint (y\xi - z\eta)\, dx\, dy\, dz, \ldots \quad \lambda_1 = \varrho \iiint (y^2 + z^2)\, \xi\, dx\, dy\, dz, \ldots.$$

Das Interesse an dem Studium der Wirbelringe in einer idealen, inkompressiblen Flüssigkeit ist besonders durch Sir *W. Thomson*'s Theorie der *Wirbelatome*[109]) bedingt, nach welcher die Atome der Materie durch Wirbelringe (Wirbelfäden ohne Ende) repräsentiert werden. Solche Ringe sind unzerstörbar und undurchdringlich, und die Zusammenhangszahl des einen solchen Ring umgebenden Raumes, sowie die Wirbelstärke sind konstant. Man hat auch Systeme zusammengeketteter Wirbelfäden als Repräsentanten für die Atome gewisser Stoffe eingeführt[108]). Um zu entscheiden, ob eine auf diesen Grundlagen ruhende Theorie eine Erklärung der thermischen Eigenschaften der Gase, sowie der der chemischen Zusammensetzung entsprechenden Spektrallinien und der Vorgänge der Dissociation und chemischen Verbindung geben kann, hat man Untersuchungen angestellt, welche u. a. die gegenseitige Einwirkung zweier Ringe, die nahe genug an einander liegen, um sich zu beeinflussen, ferner die Perioden und die verschiedenen Schwingungsarten von Wirbelringen, sowie die Stabilität von Wirbelsystemen[110]) betreffen. Alle diese Dinge sind insbesondere von *J. J. Thomson*[108]) behandelt worden. Er benutzte bei seinen Untersuchungen die Formeln für die Energie, den Impuls und das Geschwindigkeitspotential, letzteres in der Form, wie es von einem Wirbelring mit unendlich kleinem Querschnitt herrührt.

3c. Kreiswirbel. Systeme von dünnen kreisförmigen Wirbelringen mit gemeinsamer Axe wurden von *Helmholtz*[5]) betrachtet. Die Geschwindigkeit der als inkompressibel angenommenen Flüssigkeit wird durch eine axiale Stromfunktion ψ bestimmt. Das Vektorpotential steht rechtwinkelig zu den Meridianebenen und hat die Grösse $-\psi/\varpi$. Die Drehgeschwindigkeit ω ist ebenfalls rechtwinkelig zu den Meridianebenen, ihre Grösse wird durch die Gleichung

$$2\omega = \frac{1}{\varpi}\left(\frac{\partial^2\psi}{\partial\varpi^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial z^2} - \frac{1}{\varpi}\frac{\partial\psi}{\partial\varpi}\right)$$

108) *J. J. Thomson*, Vortex-rings.

109) Phil. Mag. (4) 34 (1867).

110) Sir *W. Thomson*, „Vortex-Statics", Phil. Mag. (5) 10 (1880); „Maximum and minimum energy in vortex motion", Nature 22 (1880), p. 618; Phil. Mag. (5) 23 (1887), p. 529.

gegeben. Bei stationärer Bewegung erfordert die Konstanz der Wirbelfädenstärke, dass ω/ϖ eine Funktion von ψ ist[111]). Für einen einzelnen dünnen Ring von der Stärke m kann man die Bewegung annähernd[112]) bestimmen, wenn man annimmt, dass der Querschnitt des Wirbelringes ein Kreis vom Radius c, die Öffnung ein Kreis vom Radius a ist; c/a muss dabei klein sein. Ferner nimmt man an, dass ω/ϖ für den Querschnitt konstant ist. Dann ist die Translationsgeschwindigkeit w_0 angenähert $m(2\pi a)^{-1}\log(8a/c)$[113]) und die Stromfunktion ebenso angenähert durch die Gleichung

$$\psi = \frac{ma\varpi}{2\pi}\int_0^{2\pi}\frac{1}{\sqrt{a^2+z^2}}\left\{1-\frac{2a\varpi}{a^2+z^2}\cos\vartheta+\frac{\varpi^2}{a^2+z^2}\right\}^{-1/2}\cos\vartheta\,d\vartheta$$

gegeben. Die Flüssigkeitsteilchen, deren Bahnen geschlossene, durch die Öffnung des Ringes hindurchgehende Kurven sind, bilden eine kompakte Masse, die mit dem Ringe fortschreitet; die Oberfläche dieser Masse wird durch die Gleichung $2\psi\varpi^{-2} = w_0$ bestimmt. Diese Oberfläche hat nur dann eine Öffnung, wenn c/a so klein ist, dass $\log(8a/c) > 2\pi$ ist.

Die hier mitgeteilte, angenäherte Theorie (des einzelnen Kreisrings) hat *W. M. Hicks* durch Einführung der zu dem Kreisring gehörigen harmonischen Funktionen[82]) vervollkommnet. Er hat zunächst den Fall behandelt, dass eine wirbelfreie Bewegung mit Cirkulation um einen ringförmigen Hohlraum herum stattfindet[114]), er hat ferner den Fall eines in der Flüssigkeit fortschreitenden dünnen Ringes mit einem Kern von Wirbelfäden[115]) betrachtet. Er fand, dass, wenn der Hohlwirbel sich stationär bewegen soll, der Druck im Unendlichen $m^2\varrho(2\pi^2c^2)^{-1}$ sein muss, wo $2m$ die Cirkulation ist. Er fand ferner, dass der Querschnitt eines solchen Wirbels etwas von der Form eines

---

111) *Stokes* (Fussn. 51) gab die Gleichung, der ψ bei stationärer Bewegung genügt.

112) *Lamb,* Hydrodynamics p. 255.

113) Sir *W. Thomson*, Phil. Mag. (4) 33 (1867), p. 511 erhielt das Resultat $m(2\pi a)^{-1}\{\log(8a/c) - {}^1/_4\}$, vgl. *Lamb*, Hydrodynamics p. 260; *J. J. Thomson*, Vortex-rings, *T. C. Lewis*, Quart. J. of math. 16 (1879), *C. Chree*, Edinb. Math. Soc. Proc. 6 (1887) fanden alle für den zweiten Faktor $\{\log(8a/c) - 1\}$. Die benutzten Methoden können indess das zweite Glied nicht genau geben. Sir *W. Thomson*'s Resultat wurde von *W. M. Hicks* (Fussn. 115) durch Heranziehen von Gliedern höherer Ordnung verifiziert.

114) Ein Hohlraum der im Text beschriebenen Art heisst ein „Hohlwirbel". *W. M. Hicks*, Lond. Phil. Trans. 175 (1884).

115) *W. M. Hicks*, Lond. Phil. Trans. 176 (1885). Die von *Hicks* gegebene Theorie wurde von *A. B. Basset,* Hydrodynamics 2, im einzelnen umgearbeitet.

Kreises abweicht und mehr einer Ellipse ähnelt, deren grosse Axe der Ringaxe parallel verläuft (die Ellipse ist aber an der Innenseite etwas flacher als an der Aussenseite). Damit die mit dem Ringe fortgeführte Flüssigkeit selbst ringförmig gestaltet ist, muss $c/a < 10^{-2}$ sein, wie ebenfalls von *Hicks* gezeigt wurde. Das Resultat, dass ein Wirbelring sich mit einer Art „Atmosphäre" cyklischer, wirbelfreier Bewegung umgiebt, welche gegebenenfalls von einer geschlossenen Oberfläche ohne Öffnung begrenzt ist, ist in andern Gebieten physikalischer Forschung besonders wichtig[116]).

Für ein System von Wirbelringen mit gemeinsamer Axe, von denen jeder als unendlich dünn angesehen werden soll, führen wir folgende Bezeichnungen ein: $m_1, m_2, \ldots$ seien die Wirbelstärken, $a_1, a_2, \ldots$ die Radien der Öffnungen, v_k, w_k die radialen und axialen Geschwindigkeiten des k^{ten} Ringes, die durch die übrigen bedingt sind, z_k sei der Abstand des Mittelpunktes des k^{ten} Ringes von einem festen Punkte auf der Axe und χ_k die Grösse des für den k^{ten} Ring geltenden Vektorpotentials, das wieder von der Wirkung der übrigen herrührt. Dann sind diese Grössen durch die Gleichungen[5])

$$\sum_k m_k v_k a_k = 0,$$

$$\sum_k m_k a_k (2 a_k w_k - v_k z_k - \chi_k) = 0$$

an einander gebunden. Zwei Ringe, für welche die Drehgeschwindigkeit denselben Sinn hat, bewegen sich in derselben Richtung parallel zur Axe vorwärts und können dabei abwechselnd durch einander hindurchgehen. Ist der Sinn der Drehgeschwindigkeit zweier Ringe verschieden, so nähern sie sich dabei mit stetig abnehmender Geschwindigkeit und breiten sich mit stetig wachsender Geschwindigkeit aus[117]).

3d. **Ebene Wirbelfelder.** Die allgemeine Theorie der Wirbelbewegung kann durch eine Diskussion der zweidimensionalen Bewegung illustriert werden. Dies kommt darauf hinaus, dass wir die Bewegungsformen eines Systems paralleler Wirbelfäden betrachten, deren jeder die Ebene, in der die Flüssigkeitsbewegung erfolgt, in

116) *J. Larmor,* Lond. Phil. Trans. (A) 185 (1894), p. 774.

117) Die experimentelle Untersuchung der im Texte gegebenen Sätze über Wirbelbewegung regte bereits *Helmholtz,* Wirbelbewegung, an. Was die in dieser Hinsicht benutzten Methoden und Resultate angeht, siehe *W. B. Rogers,* Amer. J. of science and arts (2) 26 (1858), p. 246; *E. Reusch,* Ann. Phys. Chem. 110 (1860); *P. G. Tait,* Lectures on some recent Advances in Physical Science, London 1876; *R. S. Ball,* Dubl. Trans. 25 (1878); *M. Brillouin,* Toul. Ann. 1 (1887).

einem singulären Punkt schneidet (Nr. 1e oben). Sind $m_1, m_2, \ldots$ die Stärken der zu den Punkten (x_1, y_1), $(x_2, y_2), \ldots$ gehörigen Wirbelfäden, so ist der reelle Teil sowie der imaginäre Teil von $\sum_k m_k(x_k + iy_k)$ konstant[5]) und das System verhält sich so, als ob es einen festen Schwerpunkt besässe. Ferner sind die Grössen $\sum_k m_k |x_k + iy_k|^2$ und $\sum_{k,k'} m_k m_{k'} \log |x_k + iy_k - x_{k'} - iy_{k'}|$ konstant[118]). Besondere Fälle hat im einzelnen *W. Gröbli*[119]) ausgearbeitet. *Helmholtz*'s Theorie der Bewegung mehrerer kreisförmiger Wirbelringe mit gemeinsamer Axe kann hier durch das Verhalten von Wirbelpaaren, die symmetrisch zu einer geraden Linie liegen, illustriert werden. Die Stärken der beiden Wirbel eines Paares haben dabei gleichen absoluten Wert, die Drehgeschwindigkeiten aber entgegengesetzten Sinn[120]). Die „Atmosphäre" eines solchen Paares hat *E. Riecke*[121]) betrachtet. Die Stabilität spezieller Konfigurationen paralleler Wirbelfäden beleuchtet das allgemeine Problem der Stabilität zusammengeketteter Wirbelfäden. Wenn n Wirbel in den Ecken eines regulären Polygons angebracht werden, so können sie sich gleichförmig auf dem Umfange des umbeschriebenen Kreises bewegen; diese Bewegung ist stabil, solange n den Wert 6 nicht überschreitet[108]).

Ebene Wirbelbewegung in kompressiblen Flüssigkeiten wurde von *L. Grätz*[122]) und *C. Chree*[123]) betrachtet. Der letztere benutzt seine Resultate, um eine Theorie der Cyklonen zu geben. Durch Anwendung der axialen Stromfunktion hat *W. Wien*[124]) eine allgemeinere Theorie der Cyklonen entwickelt; die Luft ist dabei als eine inkompressible Flüssigkeit betrachtet.

3e. **Schwingungen von Wirbeln.** Sir *W. Thomson*[125]) hat das allgemeine Problem der Schwingungen eines Wirbelringes durch die Untersuchung der Schwingungen eines cylindrischen Wirbels in Angriff genommen, wobei er den letzteren einmal als hohl, das andere

118) *Kirchhoff*, Mechanik p. 259, 260.

119) Diss. Göttingen 1877; Zürich, Vierteljahrsschrift 22 (1877).

120) *W. Gröbli* (Fussn. 119); *A. E. H. Love*, Lond. Math. Soc. Proc. 25 (1894), p. 185.

121) Gött. Nachr. 1888. *Riecke* und *Gröbli* (Fussn. 119) geben Zeichnungen für die Bahnen der Teilchen.

122) Zeitschr. f. Math. 25 (1880).

123) Edinb. Math. Soc. Proc. 5, 6, 7, 8 (1887—1890).

124) Lehrbuch der Hydrodynamik, Leipzig 1900, p. 71—83.

125) Phil. Mag. (5) 10 (1880), p. 155.

Mal als von Wirbelfäden durchzogen voraussetzte. Die Schwingungen eines kreisförmigen Wirbelringes wurden von *J. J. Thomson*[108]), *W. M. Hicks*[114])[115]) und *H. C. Pocklington*[126]) diskutiert.

Ist der Ring hohl und der Radius c des Querschnitts klein im Vergleich zum Radius a der Öffnung, so sind die Schwingungsarten folgende:

1) *Querschwingungen* (*sinuous vibrations*) — die Mittelpunkte der Querschnitte werden ohne Gestaltsänderung der Querschnitte ein wenig verschoben. Fallen n Wellenlängen auf die Kreisperipherie und ist n nicht sehr gross, so ist die Periode $\frac{2\pi a}{n\sqrt{(n^2-1)}} w_0^{-1}$, wo w_0 die Translationsgeschwindigkeit des Wirbelringes bezeichnet. Wächst n, so vermindert sich die Periode rascher, als diese Formel angiebt. Das Resultat ist dasselbe für Vollringe und Hohlringe[108]).

2) *Pulsationen* — alle Querschnitte dehnen sich gleichzeitig und in demselben Maasse aus und ziehen sich ebenso gleichmässig wieder zusammen. Die Periode ist $\frac{m\varrho}{\Pi}\sqrt{\frac{2\pi a w_0}{m}}$, wo m die Wirbelstärke und Π der Druck im Unendlichen ist[114]).

3) *Riffelschwingungen* (*fluted vibrations*) — der Querschnitt ändert seine Form in der Art, dass n Wellenlängen auf seinen Umfang fallen. Mag diese Deformation in verschiedenen Querschnitten dieselbe sein oder nicht, vorausgesetzt nur, dass sie nicht zu rasch entlang der Kreisperipherie des Ringes variiert, stets giebt es zwei Arten von Schwingungen mit den Perioden $2\pi/\sigma_1$ und $2\pi/\sigma_2$, wo σ_1 und σ_2 die Wurzeln der folgenden Gleichung sind:

$$\sigma^2 + 4\pi n\sigma\frac{\Pi}{m\varrho} + 4\pi^2 n(n-1)\frac{\Pi^2}{m^2\varrho^2} = 0.$$[127])

4) *Perlschwingungen* (*beaded vibrations*) — die Querschnitte dehnen sich in der Weise abwechselnd aus und ziehen sich ebenso wieder zusammen, dass ihr Flächeninhalt längs der kreisförmigen Peripherie des Wirbels harmonisch variiert. Fallen n Wellenlängen auf die Kreisperipherie, so ist die Periode $\frac{2\pi}{\sigma}$, wo

$$\sigma^2 = \left(\frac{2\Pi}{m\varrho}\right)^2 \frac{\pi^2}{\frac{2\pi a w_0}{m} + \frac{1}{2} - 2\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \cdots + \frac{1}{2n-1}\right)}.$$[126])

126) „The complete system of the periods of a hollow vortex-ring", Lond. Phil. Trans. (A) 186 (1895).

127) Siehe *H. C. Pocklington* (Fussn. 126). Analoge Resultate erhielt *A. B. Basset*, Hydrodynamics 2, p. 92, wodurch er Entwickelungen von *W. M. Hicks* Fussn. 115) verbesserte.

5) *Torsionsschwingungen* (*twisted vibrations*) — sie haben zunächst denselben Charakter wie die *„fluted vibrations“*, doch variiert die Deformation längs der Kreisperipherie rasch, sodass eine grosse Anzahl n' Wellenlängen derselben auf diese Peripherie entfällt. Die Periode $\frac{2\pi}{\sigma}$ ist durch die Gleichung

$$\sigma^2 + 4\pi n\sigma \frac{\Pi}{m\varrho} + 4\pi^2 \left\{ n^2 + \frac{2bn' K_n'(2bn')}{K_n(2bn')} \right\} \frac{\Pi^2}{m^2\varrho^2} = 0$$

gegeben, wo $2ba$ der Radius des Querschnitts und

$$K_n(2bn') = \frac{1}{b^n} \int_0^\infty \frac{\cos 2n'\vartheta}{(1+\vartheta^2)^{n+1/2}}\, d\vartheta$$

ist[126]).

Die *„fluted vibrations“* sind hiernach die einzigen, bei denen die Perioden von der Translationsgeschwindigkeit unabhängig sind. Die Perioden eines Vollringes, der einen Kern von Wirbelfäden enthält, wurden für den Fall, dass es sich um Schwingungen handelt, die den Pulsationen und *„fluted vibrations“* eines Hohlrings entsprechen, von *W. M. Hicks*[115]) untersucht.

3f. Gegenseitige Wirkung beliebiger unendlich dünner Wirbelringe. Für zwei dünne Ringe behandelte *J. J. Thomson*[108]) diese Wirkung unter der Annahme, dass der Abstand zwischen den Ringen stets ein grosses Vielfaches des Durchmessers eines jeden der Ringe ist. Er hat die in den Radien der beiden Ringe hervorgerufenen Wirkungen, die Änderungen der Bahnen ihrer Centren und die Gestaltsänderungen ihrer Centrallinien bestimmt. Bei dem Zusammenstoss gewinnt der Ring, dessen Radius wächst, an innerer Energie, und beide Ringe geraten in einen Zustand von Querschwingungen. Derselbe Autor hat auch das Problem behandelt, die an einem kugelförmigen Hinderniss vorbei erfolgende Bewegung eines Wirbelringes zu bestimmen[108]). *T. C. Lewis* wandte auf den besonderen Fall, dass die Axe des Ringes durch das Centrum der Kugel hindurchgeht, die Methode der Bilder an[113]).

3g. Wirbel von endlichem Querschnitt. Die Methode von *J. J. Thomson* lässt sich auf Wirbel anwenden, deren Querschnitt so klein im Vergleich zu der Öffnung ist, dass die wirkliche Gestalt des Querschnitts und die Verteilung der Drehgeschwindigkeit im Innern des Wirbelgebietes nicht ins Gewicht fallen. Die unter Nr. 3c genannte Methode von *W. M. Hicks* giebt bei gewissen Problemen Korrektionen von der Natur einer zweiten Annäherung. Nimmt der in Wirbelbewegung befindliche Flüssigkeitsteil ein Volumen ein, von

dem keine lineare Dimension als klein angesehen werden darf, so gestalten sich die Probleme weitaus komplizierter. Besondere Aufmerksamkeit ist der Bestimmung von stationären Bewegungen geschenkt worden, sowie auch der Auffindung derjenigen Flächen, welche den in Wirbelbewegung befindlichen Teil der Flüssigkeit von dem wirbelfreien Teil trennen. An einer solchen Oberfläche sind die tangentiellen und normalen Komponenten der Geschwindigkeiten, sowie der Druck stetig. Die Bedingung für die Stetigkeit des Druckes ist identisch erfüllt, wenn die Geschwindigkeitskomponenten den angegebenen Bedingungen genügen[128]).

Bei zweidimensionaler Bewegung ist die Drehgeschwindigkeit ζ mit der Stromfunktion ψ durch die Gleichung $-2\zeta = \frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2}$ verbunden. Die Bedingung für die Konstanz der Wirbelstärke wird durch die Gleichung $\frac{\delta\zeta}{\delta t} = 0$ ausgedrückt. Ist die Bewegung stationär[111]), so gilt hiernach

$$\frac{\partial^2\psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\psi}{\partial y^2} = f(\psi). \tag{1}$$

G. Kirchhoff[129]) hat gezeigt, dass ein Wirbel mit gleichförmiger Drehgeschwindigkeit durch eine Ellipse mit den Halbaxen a, b, welche mit der Winkelgeschwindigkeit $2\zeta ab/(a+b)^2$ im Sinne der Drehgeschwindigkeit um ihren Mittelpunkt rotiert, begrenzt werden kann. *M. J. M. Hill*[130]) fand einen stationären Bewegungszustand, der dem *Kirchhoff*'schen elliptischen Wirbel entspricht, indem er annahm, dass die Flüssigkeit nach aussen durch eine mit der Begrenzung des Wirbels konfokale Ellipse begrenzt sei. *Kirchhoff*'s und *Hill*'s elliptische Wirbel sind stabil, wenn die Excentrizität nicht zu gross ist[131]). Die Lösung des Problems der wirbelfreien Bewegung in einem rotierenden Cylinder oder Prisma bestimmt zugleich die Wirbelbewegung mit gleichförmig verteilter Drehgeschwindigkeit in dem als ruhend vorausgesetzten Cylinder[132]). Man hat Lösungen von Problemen, die

128) *R. Hargreaves*, Lond. Math. Soc. Proc. 27 (1896), p. 281.

129) Mechanik, p. 261. *A. E. H. Love*, Quart. J. of math. 27 (1895) dehnte die Resultate auf die Fälle aus, in denen die Dichte ausserhalb und innerhalb des Wirbels verschieden ist und eine Unstetigkeit der tangentialen Geschwindigkeit an der Trennungsfläche statthat; *S. A. Tschapligin*, Moskau, Naturf. Ges. 10 (1899) behandelte den Fall, wo ausserhalb des Cylinders eine Wirbelbewegung mit einer verschiedenen gleichförmigen Drehgeschwindigkeit gegeben ist.

130) Lond. Phil. Trans. 175 (1884).

131) *A. E. H. Love*, Lond. Math. Soc. Proc. 25 (1894), p. 18.

132) *A. G. Greenhill*, Ency. Brit.; vgl. *Stokes* (Fussn. 51) und *F. D. Thomson*, Oxf. Cambr. and Dubl. Mess. of math. 3 (1866).

sich auf die Bewegung eines Wirbels mit kreisförmiger Grenze beziehen, mit Hülfe von *Bessel*'schen Funktionen gefunden, indem man $\varkappa^2\psi$ für $f(\psi)$ in Gleichung (1) einsetzte[133]).

Damit eine stationäre Bewegung in drei Dimensionen möglich ist, muss sich in der Flüssigkeit eine Schar von Flächen, jede überdeckt mit einem Netzwerk von Strom- und Wirbellinien, so ziehen lassen, dass das Produkt $q\omega \sin\beta\, d\nu$ für jede Fläche konstant ist[134]). Hier bezeichnet ω die resultierende Drehgeschwindigkeit, β den Winkel zwischen den Richtungen von q und ω und $d\nu$ die Länge der Normale, die zwischen zwei unendlich benachbarten Flächen der Schar gezogen ist. Die Grösse

$$V - \int \frac{dp}{\varrho} - \tfrac{1}{2} q^2$$

ist für jede dieser Flächen konstant.

W. J. M. Rankine[135]) gab die Formel für die Oberfläche eines vertikal verlaufenden Hohlwirbels in einer sich unter Einwirkung der Schwere bewegenden, inkompressiblen Flüssigkeit; sie lautet $z\varpi^2 = \text{const.}$ Die Bewegung erfolgt in Horizontalebenen $z = \text{const.}$ *M. J. M. Hill*[136]) zeigte, dass als Grenze eines Wirbelgebietes eine Kugel vom Radius a auftreten kann; die Bewegung ist dann durch eine axiale Stromfunktion gegeben, welche innerhalb bezw. ausserhalb des Wirbelgebietes die Werte

$$(2) \qquad \frac{w_0}{4a^2}\varpi^2(3\varpi^2 + 3z^2 - 5a^2) \quad \text{und} \quad -\frac{a^3 w_0 \varpi^2}{2(z^2+\varpi^2)^{3/2}}$$

hat. Andere Bewegungsarten eines kugelförmigen Wirbelgebietes hat *W. M. Hicks*[137]) diskutiert. Bei diesen ist die in Meridianebenen erfolgende Wirbelbewegung mit einer Bewegung rechtwinkelig zu diesen Ebenen zusammengesetzt. Einige Typen von Wirbelbewegung, bei denen die Stromlinien mit den Wirbellinien zusammenfallen und die Bahnen der Teilchen Schraubenlinien sind, wurden von *E. Beltrami*[138]) und *G. Morera*[139]) studiert. *W. Voigt*[93]) diskutierte ein Beispiel einer

---

133) *Lamb,* Hydrodynamics p. 264.

134) *Lamb,* Lond. Math. Soc. Proc. 9 (1880).

135) *Lamb*, Hydrodynamics p. 30 schreibt dies Resultat *Rankine* zu.

136) Lond. Phil. Trans. (A) 185 (1894), wo auch gezeigt wird, dass eine entsprechende Lösung für ein Sphäroid nicht existiert; vgl. *R. Hargreaves*, Lond. Math. Soc. Proc. 27 (1896), p. 299.

137) Sheffield, Univ. Coll. Commem. 1897; Lond. Phil. Trans. (A) 192 (1898).

138) Nuovo Cim. (3) 25 (1889), p. 212.

139) Rom, Acc. dei Linc. Rend. 5 (1889).

Wirbelbewegung innerhalb einer festen ellipsoidischen Begrenzung. Die Geschwindigkeiten werden lineare Funktionen der Koordinaten und die Drehgeschwindigkeit ist durch elliptische Funktionen der Zeit gegeben. Flüssigkeitsbewegungen, bei denen zwar der curl (u, v, w) nicht verschwindet (sodass Wirbelfäden vorhanden sind), bei denen aber für einen endlichen Wert von n $\mathrm{curl}^n(u, v, w)$ verschwindet, betrachteten *H. A. Rowland*[140]) und *C. Fabri*[141]). Letztere hat diese Untersuchungen auf kompressible Flüssigkeiten und zähe Flüssigkeiten ausgedehnt.

4. Der eigenen Schwere unterworfene, flüssige Ellipsoide.

4a. Allgemeine Theorie. Von den hydrodynamischen Problemen, bei denen es sich um Wirbelbewegung in einem endlich ausgedehnten Raumteile handelt, ist in der Litteratur am meisten die Bewegung einer der eigenen Schwere unterworfenen Flüssigkeitsmasse behandelt worden, die sich so bewegt, dass ihre anfänglich ellipsoidische Oberfläche fortgesetzt ellipsoidischen Charakter behält. Auf die Untersuchungen von *Maclaurin* und *Jacobi* ist schon in IV 15, Nr. **9** hingewiesen. *P. G. L. Dirichlet*[142]) untersuchte das Problem, indem er von der Annahme ausging, dass die Koordinaten der Teilchen lineare Funktionen der Anfangswerte sind. Er erhielt so ausreichende Gleichungen, um die Koeffizienten als Funktionen der Zeit zu bestimmen. Bei Annahme der Gleichung $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ für die freie Oberfläche wird der Druck p bei ihm durch die Formel $p = \sigma\left(1 - \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2}\right)$ ausgedrückt, unter σ eine Funktion der Zeit verstanden. *F. Brioschi*[143]) zeigte, wie man die Differentialgleichungen in die kanonische Form für die Bewegungsgleichungen eines dynamischen Systems mit acht Freiheitsgraden bringt. *Riemann*[144]) bezog die *Lagrange*'schen Bewegungsgleichungen der Hydrodynamik auf bewegte Axen und fand ein System von zehn Gleichungen, durch welche die Längen der Haupt-

140) Amer. J. of math. 3 (1880).

141) Nuovo Cim. (3) 31 (1892); (3) 36 (1894); (4) 1 (1895); Bol. Mem. (5) 4 (1894); Pisa, Ann. 7. (1895).

142) Gött. Abh. 1860 und J. f. Math. 58 (1861). Die Abhandlung veröffentlichte *R. Dedekind*, welcher einige Zusätze machte.

143) J. f. Math. 59 (1861). Siehe auch *A. E. H. Love*, Phil. Mag. (5) 25 (1888).

144) Gött. Abh. 9 (1861) = Ges. math. Werke, Leipzig 1876, p. 168, 2. Aufl. 1892, p. 157.

axen des Ellipsoids zu irgend einer Zeit, die Winkelgeschwindigkeit um dieselben, die Drehgeschwindigkeit und der oben eingeführte Koeffizient σ aneinander geknüpft sind. *A. G. Greenhill*[145]) und *A. B. Basset*[146]) benutzten die auf bewegte Axen bezogenen *Euler*'schen Gleichungen und bildeten Ausdrücke für die Geschwindigkeitskomponenten, indem sie 1) eine Bewegung mit gleichförmig verteilter Drehgeschwindigkeit, 2) eine wirbelfreie Bewegung, die von der Rotation der Begrenzungsfläche herrührt, 3) eine wirbelfreie Bewegung, welche von der Gestaltsänderung der Grenze herstammt, kombinierten. Sie erhielten dieselben Gleichungen wie *Riemann*. Diese Gleichungen haben drei Integrale, welche die Konstanz der Energie, der Bewegungsgrösse und der Wirbelfädenstärke aussagen[144]). Ist die Oberfläche ein Sphäroid[147]) oder ein elliptischer Cylinder[148]), so sind hiermit alle ersten Integrale des Problems gewonnen, und die Bewegung des Systems ist durch Quadraturen zu bestimmen. Die Gleichungen der Oberflächen, die bei der Bewegung stets von denselben Teilchen gebildet werden, wurden für das allgemeine Problem von *M. J. M. Hill*[149]) bestimmt. Er drückte auch die Geschwindigkeitskomponenten durch die Formeln (4) in Nr. **3** a aus. Bei den stationären Bewegungen eines flüssigen Ellipsoids bleiben die Längen der Hauptaxen, ihre Winkelgeschwindigkeit und die Verteilung der Drehgeschwindigkeit im Innern der Flüssigkeit konstant. *Riemann*[144]) zeigte, dass bei stationärer Bewegung die Axe der resultierenden Winkelgeschwindigkeit, mit welcher die Hauptaxen rotieren, und diejenige der resultierenden Drehgeschwindigkeit zusammenfallen müssen. Es giebt Fälle der stationären Bewegung, bei denen diese Axen mit einer Hauptaxe zusammenfallen, und andere, bei denen dies nicht eintritt, wo sie aber in einer Hauptebene liegen[150]). Die Bewegungen erster Art um-

145) Cambr. Phil. Soc. Proc. 3 (1879), p. 233; 4 (1880), p. 4. *Greenhill* betrachtete nur stationäre Bewegungen.

146) Lond. Math. Soc. Proc. 17 (1886) und Hydrodynamics 2, ch. 15.

147) Die Lösung für diesen Fall gab *Dirichlet* (Fussn. 142). Siehe auch *Basset*, Hydrodynamics 2, p. 102. Betreffs des speziellen Falls, in welchem die Bewegung wirbelfrei ist, siehe *W. M. Hicks*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 5 (1883).

148) *R. Lipschitz*, J. f. Math. 78 (1874), p. 245. Siehe auch *A. E. H. Love*, Quart. J. of math. 23 (1888), p. 153.

149) Lond. Math. Soc. Proc. 23 (1892).

150) Alle diese Formen gab *Riemann* (Fussn. 144). Ferner diskutierte sie *Greenhill* (Fussn. 145) und Cambr. Phil. Soc. Proc. 4 (1882), p. 208. Die Formen der stationären Bewegung und einige Formen periodischer Bewegung behandelte *E. Padova*, Pisa, Ann. 1 (1871).

fassen die verschiedenen Fälle eines nach Art eines starren Körpers rotierenden Flüssigkeitsellipsoids, wie sie von *Maclaurin* und *Jacobi* entdeckt wurden. Sie umfassen auch einen Fall, bei dem die sich bewegende Flüssigkeit eine Oberfläche von der Form des *Jacobi*'schen Ellipsoids besitzt, jedoch die Oberfläche in Ruhe bleibt[151]); diese Bewegungsform nennt man das „*Dedekind*'sche Ellipsoid". *Riemann*[144]) diskutierte auch die Stabilität der verschiedenen Arten der stationären Bewegung mit dem Ergebnis, dass *Jacobi*'s und *Dedekind*'s Formen stabil sind, *Maclaurin*'s Form aber nur stabil ist, wenn das Verhältnis der kleinsten zur grössten Axe des Sphäroids den Wert 0,303327 ... überschreitet. Diese Resultate (betr. Stabilität) wurden indess nur unter der Annahme erhalten, dass die freie Oberfläche jedenfalls ein Ellipsoid bleibt.

4b. **Nähere Angaben über Maclaurin's Sphäroid und Jacobi's Ellipsoid.** In der Bezeichnung von IV 15, Nr. 9 können die von den Axen des *Jacobi*'schen Ellipsoids erfüllten Gleichungen so angesehen werden, dass a/b und a/c durch einen Parameter $\frac{\omega^2}{4\pi G\varrho}$ gegeben sind. Die solcherweise entstehenden Ellipsoide bilden eine lineare Reihe[152]). Die *Maclaurin*'schen Sphäroide bilden eine ebensolche Reihe, in der a/b konstant $= 1$ ist, welchen Wert der Parameter auch haben mag. Diese beiden Reihen haben ein Sphäroid gemein, für welches die Grösse $f\,(= \sqrt{a^2/c^2 - 1})$ der folgenden Gleichung[153]) genügt:

$$(1) \qquad (3 + 14f^2 + 3f^4) \operatorname{arc\,tang} f = f(3 + 13f^2).$$

Die Wurzel ist $f = 1{,}39457\ldots$. Bei der Reihe der *Jacobi*'schen Ellipsoide nehmen wir allgemein an, dass $a \geqq b > c$ ist; dann ist der Wert von a/c, welcher der Gleichung (1) entspricht, der kleinste, der für solch ein Ellipsoid möglich ist; wächst nun a/b über 1 hinaus, so nehmen auch die beiden Grössen f und a/c immer zu. *Thomson* und *Tait*[154]) gaben an, dass das *Maclaurin*'sche Sphäroid stabil oder

151) Von *R. Dedekind* (Fussn. 142) entdeckt. Siehe auch *A. E. H. Love* (Fussn. 143).

152) *H. Poincaré*, Acta math. 7 (1885), betrachtet die *Jacobi*'schen Ellipsoide als Beispiele von Gleichgewichtskonfigurationen eines mechanischen Systems mit einer endlichen Anzahl n von Freiheitsgraden, wobei die Koordinaten von einem Parameter abhängen. Jede Gleichgewichtskonfiguration ist dann durch einen Punkt einer Kurve in einem n-dimensionalen Raume dargestellt; solch eine Kurve nennt *Poincaré* eine lineare Reihe (série linéaire).

153) *Thomson* and *Tait*, Nat. Phil. 2, p. 332.

154) Nat. Phil. 2, p. 333.

labil ist, je nachdem f kleiner oder grösser als die Wurzel der Gleichung (1) ist. *Riemann*'s Resultat war, dass Labilität bei $f > 3{,}14156\ldots$ eintritt.

Die Frage der Stabilität des *Jacobi*'schen Ellipsoids diskutierte *Poincaré*[152]) auf zwei Weisen, einmal als Problem der statischen Stabilität, das zweite Mal als Problem der Wellenbewegung. Bei der ersten Methode führte er den Begriff des „Verzweigungsgleichgewichts" ein. Wenn die Konfigurationen des Gleichgewichts eines mechanischen Systems von einem variablen Parameter abhängen, so können mehrere lineare Reihen solcher Konfigurationen vorhanden sein — da wo zwei solche Reihen einander treffen, ist eine Verzweigungsstelle. An einer solchen Stelle findet im allgemeinen ein Austausch der Stabilitäten statt. In dem besonderen Falle des *Jacobi*'schen Ellipsoids und des *Maclaurin*'schen Sphäroids verifiziert dies *Thomson* und *Tait*'s Angabe und zeigt, dass das *Jacobi*'sche Ellipsoid in der That stabil ist, wenn a/c nur wenig den Wert, welcher der Gleichung (1) entspricht, überschreitet. Bei der Aufsuchung derjenigen Fälle in der Reihe der *Jacobi*'schen Ellipsoide, welche Verzweigungsformen vorstellen, benutzte *Poincaré Lamé*'sche Funktionen und bewies, dass Störungen der Ellipsoidoberfläche, die den *Lamé*'schen Funktionen der verschiedenen Ordnungen entsprechen, eine diskrete Menge von Verzweigungsformen festlegen, wobei die Werte von a/c mit der Ordnung der *Lamé*'schen Funktionen wachsen. Die den beiden Reihen der *Jacobi*schen Ellipsoide und *Maclaurin*'schen Sphäroide gemeinsame Form entspricht einer *Lamé*'schen Funktion von der zweiten Ordnung; *Jacobi*'s Ellipsoid hört auf stabil zu sein, wenn a/c den Wert überschreitet, welcher einer Störung dritter Ordnung entspricht. Man schliesst, dass darüber hinaus eine lineare Reihe von stabilen Gleichgewichtsfiguren besteht, deren erste Glieder sich sehr wenig von Ellipsoiden unterscheiden, die aber weiterhin die Form einer Birne oder einer Hantel annehmen.

Poincaré[152]) betonte auch den Unterschied zwischen „säkularer" und „gewöhnlicher" Stabilität[155]). Für eine Flüssigkeitsbewegung ist die Stabilität säkular, sofern die Bewegung bei Mitberücksichtigung der Zähigkeit stabil ist. Man hat gewöhnliche Stabilität, wenn die Bewegung unter Annahme einer idealen Flüssigkeit stabil ist. Somit erscheint *Riemann*'s Bedingung der Stabilität für das *Maclaurin*'sche Sphäroid ($f < 3{,}14156\ldots$) als eine Bedingung gewöhnlicher Stabilität.

Poincaré[152]) untersuchte andrerseits die Wellen auf dem *Jacobi*'schen

155) Vgl. *Thomson* and *Tait*, Nat. Phil. 1, p. 391.

Ellipsoid, die entstehen, wenn die stationäre Bewegung leicht gestört wird. Er bewies, dass für eine wie ein starrer Körper rotierende Flüssigkeit die gestörte Bewegung vollständig mit Hülfe einer Funktion bestimmt werden kann, welche innerhalb einer aus der freien Oberfläche durch eine homogene Deformation abgeleiteten Fläche harmonisch ist und an jener Oberfläche eine bestimmte Bedingung erfüllt. Diese Methode ist seitdem auf zahlreiche Probleme angewandt worden[156]). Insbesondere benutzte sie *G. H. Bryan*[157]) zur direkten Untersuchung der Stabilität des *Maclaurin*'schen Sphäroids. Er bewies, dass, wenn *Riemann*'s Bedingung erfüllt ist, das Sphäroid in der That gewöhnliche Stabilität besitzt, auch wenn andere als ellipsoidische Nachbarformen in Betracht gezogen werden, und bestimmte alle Arten und Perioden der Oscillationen des Systems. Derselbe Autor hat die Unterscheidung zwischen säkularer und gewöhnlicher Stabilität durch eine Diskussion der Wellen auf einem rotierenden Cylinder von zäher Flüssigkeit illustriert[158]). Die Bestimmung der längsten Oscillationsperiode des *Maclaurin*'schen Sphäroids führt unter anderm dazu, *G. H. Darwin*'s Theorie von der Entstehung des Mondes zu bestätigen[159]).

Die oben erwähnte *Poincaré*'sche, hantelförmige Gleichgewichtsfigur ist von *G. H. Darwin*[160]) ausführlich behandelt worden. Andererseits ist die Aufsuchung ringförmiger Gleichgewichtsfiguren gravitierender Massen von rotierender Flüssigkeit der Gegenstand zahlreicher anderer Untersuchungen gewesen[161]).

---

156) *A. E. H. Love,* Quart. J. of math. 23 (1888), p. 158 für den Fall, dass die freie Oberfläche ein elliptischer Cylinder ist; Lond. Math. Soc. Proc. 19 (1888) für den Fall, dass die Flüssigkeit in eine elastische Hohlkugel eingeschlossen ist; *S. S. Hough,* Lond. Phil. Trans. (A) 186 (1895) für den Fall einer ellipsoidischen, mit Flüssigkeit erfüllten Schale; Lond. Phil. Trans. (A) 189 (1897) für einen Ocean von geringer Tiefe, der einen festen Kugelkern umschliesst.

157) Lond. Phil. Trans. (A) 180 (1889) und Lond. Roy. Soc. Proc. 47 (1890).

158) *G. H. Bryan*, Cambr. Phil. Soc. Proc. 6 (1888), p. 248.

159) *A. E. H. Love*, Phil. Mag. (5) 27 (1889).

160) Lond. Phil. Trans. (A) 178 (1887).

161) *Thomson* and *Tait,* Nat. Phil. 2, p. 333; *L. Matthiessen*, Zeitschr. f. Math. 10 (1865) und Ann. di mat. (2) 3 (1870); *Poincaré* (Fussn. 152) und Paris C. R. 102 (1886), p. 970; *A. B. Basset*, Amer. J. of math. 11 (1888). *Matthiessen* hat auch die Wirkung einer gleichförmigen Komprimierbarkeit der Flüssigkeit bei ellipsoidischen und cylindrischen Gleichgewichtsfiguren betrachtet, Zeitschr. f. Math. 16 (1871) und 28 (1883).

5. Wellenbewegung inkompressibler Flüssigkeiten.

5a. Natur der Bewegung[162]). Eine Masse inkompressibler Flüssigkeit, die unter Einwirkung der Schwere sich in Ruhe befindet, repräsentiert uns ein im stabilen Gleichgewicht befindliches mechanisches System. Stört man das Gleichgewicht ein wenig, so wird die Flüssigkeit kleine Schwingungen ausführen. Tritt hierbei keine Dissipation der Energie ein, so wird sich die Bewegung als eine Überlagerung von kleinen Schwingungen von harmonischem Typus auffassen lassen. Die Perioden dieser Hauptschwingungen werden durch die Grenzbedingungen bestimmt. Wenn man die freie Oberfläche als unendlich ausgedehnt ansieht, so sind kleine Schwingungen irgendwelcher Periode möglich. Auch in diesem Falle kann man die kleine Bewegung stets als aus Teilbewegungen von harmonischem Typus zusammengesetzt auffassen; jedoch ist es bequemer, die Ausbreitung von lokalen Erhebungen und Vertiefungen über die Oberfläche von der gestörten Stelle hin direkt ins Auge zu fassen. Diese Änderung des Gesichtspunktes entsteht daraus, dass eine einzelne Bewegung von harmonischem Typus nur dann hervorkommt, wenn die Störung in geeigneter Weise über die ganze Oberfläche hin verteilt ist. Bei einer begrenzten Oberfläche ist natürlich die anfängliche Bewegung, die unmittelbar auf die Störung folgt, beinahe von den Grenzbedingungen unabhängig; sie ist also der Bewegung, die bei unbegrenzter Oberfläche erzeugt würde, ähnlich. Alles in allem ist, wenn die Flüssigkeit eine grosse Fläche bedeckt, z. B. im Falle eines Ozeans oder langen Kanals, das Hauptinteresse auf die Fortpflanzung der Wellen von Ort zu Ort gerichtet. Ist dagegen die Flüssigkeit in einem Bassin von mässigen Dimensionen eingeschlossen, so haben die harmonischen Schwingungen und deren Perioden mehr Interesse. Die beiden Bewegungsarten kann man als progressive Wellen und stehende Oscillationen bezeichnen. Weiterhin wollen wir

162) Die Theorie der Wellenbewegung in Flüssigkeiten ruht weit mehr auf Beobachtung und Experiment, als die meisten andern Zweige der theoretischen Hydrodynamik. Betreffs der früheren Untersuchungen (sowohl der theoretischen als der experimentellen) können wir auf *E. H.* und *W. Weber*, Wellenlehre auf Experimente gegründet, Leipzig 1825, verweisen. Die experimentellen Untersuchungen von *J. Scott Russell*, Brit. Assn. Rep. 1844 gaben zu zahlreichen theoretischen Abhandlungen Anlass. Eine ausgedehnte Bibliographie gab *O. Riess*, Rep. Phys. 26 (1890). Die Theorie der Wellen von permanentem Typus wurde von *Helmholtz*, Berl. Ber. 1890 und Ann. Phys. Chem. 41 (1890) = Wiss. Abh. 3, p. 333 mit allgemeinen dynamischen Theorieen in Zusammenhang gebracht; siehe auch *Lamb*, Hydrodynamics p. 421.

bei einer Wellenbewegung die Erhebungen und Vertiefungen der freien Oberfläche in erster Annäherung als klein ansehen. Im Gegensatze dazu würde das Problem, die wirkliche Form endlicher Wellen zu finden und die Bewegung vollkommen zu bestimmen, entweder einen Prozess fortgesetzter Approximation verlangen mit einer Untersuchung über die Konvergenz dieses Prozesses, oder eine genaue Lösung, die alle Gleichungen und Bedingungen ohne Approximation erfüllt. Achtet man speziell auf die Form der freien Oberfläche, so kann man natürlich Wellenbewegungen von endlicher Amplitude mit den Bewegungsformen, welche freie Oberflächen haben und die in Nr. 1f betrachtet wurden, in Beziehung bringen.

5b. **Lange Wellen.** In früheren Zeiten schenkte man einer speziellen Approximationsmethode, die sich auf die „langen Wellen" anwenden lässt, ein besonderes Interesse. Eine Welle heisst „lang", wenn die Entfernung von einer Erhöhung bis zur nächsten im Verhältnis zur Tiefe der Flüssigkeit gross ist. In diesem Falle ist die Trägheit der vertikalen Bewegung klein im Verhältnis zu derjenigen der horizontalen Bewegung, und man kann annehmen, dass der Druck in einem Punkte gleich dem hydrostatischen Druck ist, der von der Tiefe dieses Punktes unter der gestörten freien Oberfläche herrührt. Mit andern Worten, die kinetische Energie kann aus den horizontalen Geschwindigkeiten, die potentielle Energie aus den vertikalen Verschiebungen berechnet werden. Erfolgt eine derartige Bewegung in einem Kanal mit vertikalen Wänden, so bewegen sich die Teilchen, die einem vertikalen Querschnitt angehören, so, dass sie stets einen solchen Querschnitt bilden. Die horizontale Verschiebung ξ erfüllt die Gleichung[163])

$$\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} = gh\left(1 + \frac{\partial \xi}{\partial x}\right)^{-3} \frac{\partial^2 \xi}{\partial x^2}, \tag{1}$$

wo x in der Längsrichtung des Kanals gemessen ist und h die ungestörte Tiefe bedeutet. Dies giebt in erster Annäherung für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{gh}$.[164]) Für einen Kanal von gleichförmigem Querschnitt, dessen Flächeninhalt A und dessen Breite an der Oberfläche b ist, wird diese Formel durch $\sqrt{gA/b}$[165]) ersetzt. Eine Diskussion der Gleichung (1) zeigt, dass die Wellen sich nicht

163) *G. B. Airy*, Artikel „Tides and Waves" im Ency. Metrop., Lond. 1845.

164) *Lagrange*, Berlin, Mém. (2) 12 (1781) und Méc. an. 2, p. 295.

165) *P. Kelland*, Edinb. Roy. Soc. Trans. 14 (1839). Siehe auch *G. Green*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 6 (1837), p. 457 und 7 (1839), p. 87 = Papers, London 1871, p. 223, 271.

ins Unendliche ausdehnen können, ohne ihre Form zu ändern[163]). Man wendet diese Annäherungsmethode hauptsächlich bei der Theorie von Ebbe und Flut an[166]).

5c. **Oscillatorische Wellen**[167]). Sehen wir die Wellenbewegung als eine Oscillation um eine Gleichgewichtslage an, so nehmen wir an, dass die Lagenänderung, soweit sie von der Zeit abhängt, sich durch Sinus und Cosinus von σt ausdrücken lässt. Wir suchen ferner das Geschwindigkeitspotential φ aus folgenden Bedingungen zu bestimmen: 1) es soll in dem von der Flüssigkeit erfüllten Raum harmonisch sein; 2) die Normalkomponente der Geschwindigkeit soll an den festen Grenzen verschwinden; 3) die freie Oberfläche soll eine Gleichung der Form $z = bf(x, y)\cos(\sigma t + \varepsilon)$ erhalten; 4) der Druck p, der sich aus der Gleichung $p = \varrho\left(-gz - \tfrac{1}{2}q^2 - \frac{\partial\varphi}{\partial t}\right)$ bestimmt, soll in allen Punkten dieser begrenzenden Oberfläche denselben Wert haben.

Nehmen wir die Konstante b klein und φ von der Form $A\Phi(x, y, z)\sin(\sigma t + \varepsilon)$, wo A von derselben Ordnung wie b klein ist, so kann die Bedingung (4) mit Annäherung durch folgende:

$$g\frac{\partial\Phi}{\partial z} = \sigma^2\Phi$$

in allen Punkten der Oberfläche ersetzt werden[168]). Nehmen wir ferner an, dass $f(x, y)$ die Form $\sin(kx + \alpha)$ hat, also unabhängig von y ist, und dass die Flüssigkeit auf einer festen horizontalen Ebene $z = -h$ ruht, so finden wir, dass einer freien Oberfläche $z = b\sin(kx + \alpha)\cos(\sigma t + \varepsilon)$ ein Geschwindigkeitspotential

$$\varphi = -\frac{b\sigma}{k}\frac{\cosh k(z + h)}{\sinh kh}\sin(kx + \alpha)\sin(\sigma t + \varepsilon)$$

entspricht, vorausgesetzt dass

$$\sigma^2 = gk\tanh kh.$$

Die hiermit bestimmten Bewegungen können superponiert werden, sodass unsere Lösung sowohl stehende Oscillationen, als auch progressive Wellen einschliesst. Im letzteren Falle sind die Bahnen der

166) Siehe Bd. VI. Wegen anderer Typen langer Wellen siehe Nr. 5h unten.

167) *Stokes*, Cambr. Phil. Soc. Trans. 8 (1847), p. 441 = Papers 1, p. 197, auch Cambr. and Dubl. math. J. 4 (1849), p. 219 = Papers 2, p. 221, wo sich ausser der Theorie ein Vergleich zwischen Theorie und Experiment findet.

168) *A. G. Greenhill*, Amer. J. of math. 9 (1886); *H. Poincaré*, J. de math. (5) 2 (1896).

Teilchen Ellipsen[167]) und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit wird durch die Gleichung[163])

$$U^2 = gk^{-1} \tanh kh$$

gegeben. Gehen wir dadurch zur Grenze über, dass wir kh unendlich gross werden lassen, so erhalten wir in $\sqrt{(g/k)}$ die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der Tiefseewellen. Gehen wir andererseits so zur Grenze über, dass wir kh unendlich klein annehmen, so erhalten wir die erste Annäherung für die Bewegung langer Wellen, mit der Fortpflanzungsgeschwindigkeit $\sqrt{gh}$. In diesem Falle gehen die elliptischen Bahnen der Teilchen annähernd in horizontale gerade Linien über.

Insbesondere können wir durch solche Superposition die Bewegung erhalten, welche einer beliebig kleinen Anfangsstörung der freien Oberfläche entspricht. Solche Bewegungen betrachteten *Poisson*[169]) und *Cauchy*[101]), in neuerer Zeit besonders Sir *W. Thomson*[170]) und *W. Burnside*[171]).

5 d. **Energie der Wellenbewegung. Gruppengeschwindigkeit**[172]). Im Falle progressiver Wellen der soeben betrachteten Art, die durch die Gleichung

$$\varphi = -\frac{b\sigma}{k} \frac{\cosh k(z+h)}{\sinh kh} \sin(kx - \sigma t)$$

gegeben sind, ist die gesamte Energie der Flüssigkeitsmasse, welche zwischen zwei vertikalen Ebenen $y = y_0$ und $y = y_0 + 1$ und zwei anderen vertikalen Ebenen $x = x_0$, $x = x_0 + 2\pi k^{-1}$ eingeschlossen ist, $\pi k^{-1} g\varrho b^2$. Dies ist die „Energie in einer Wellenlänge". Die eine Hälfte dieser Energie ist potentielle, die andere kinetische Energie. Der Energiebetrag, welcher während der Zeitperiode $\frac{2\pi}{\sigma}$ über die Breiteneinheit einer Ebene $x = \text{const.}$ hinübergeschafft wird, ist

$$\tfrac{1}{2}\pi k^{-1} g\varrho b^2 (1 + kh \cdot \operatorname{cosech} kh \cdot \operatorname{sech} kh).$$

Wenn eine Anzahl Wellenbewegungen von verschiedenen Wellenlängen superponiert wird und die Fortpflanzungsgeschwindigkeit U

169) Paris, Mém. de l'Acad. 1 (1816).

170) Lond. Roy. Soc. Proc. 42 (1887). Die Bewegung nahe dem Anfange und Ende eines Wellenzuges wurde von demselben Autor in Phil. Mag. (5) 23 (1887), p. 113 betrachtet.

171) Lond. Math. Soc. Proc. 20 (1889), p. 22.

172) Lord *Rayleigh*, Lond. Math. Soc. Proc. 9 (1877), p. 21, wiederabgedruckt in Theory of Sound, 1. ed., London 1877, 2, p. 297, 2. ed., London 1894, 1 p. 473 = Papers 1, p. 322.

von der Wellenlänge $\frac{2\pi}{k}$ abhängt, so pflanzen sich die Wellen von nahezu der gleichen Länge mit nahezu der gleichen Geschwindigkeit fort, sodass sie eine zusammengehörige „Gruppe von Wellen" bilden. Aber die Stellen, an denen die superponierten Verschiebungen das Maximum der Erhebung ergeben, bewegen sich dann durch die Gruppe hin. Die Geschwindigkeit, mit der das Maximum der Erhebung entlang der Oberfläche fortschreitet, heisst „Gruppengeschwindigkeit". Sie ist von der Fortpflanzungsgeschwindigkeit U der Wellen verschieden und hat die Grösse $U + k\frac{\partial U}{\partial k}$.[173]) Das Verhältnis der Energie, die in einer Periode über die Breiteneinheit hinübergeschafft wird, zu der Energie in einer Wellenlänge ist gleich dem Verhältnis der Gruppengeschwindigkeit zu der Wellengeschwindigkeit[174]).

5e. Stehende Wellen. Innerhalb der in Nr. 5c und 5d angenommenen Approximation hat die progressive Welle permanenten Typus; es ist also die Bewegung, welche man erhält, wenn man dem ganzen System eine Geschwindigkeit $-U$ entlang der x-Axe hinzufügt, eine stationäre, zweidimensionale Strömung zwischen einer festen Horizontalebene und einer cylindrischen Oberfläche, deren Querschnitt eine Sinuskurve mit kleiner Amplitude ist. Man hat diesen Kunstgriff, die Wellenbewegung auf eine stationäre Bewegung[175]) zurückzuführen, auch auf Kapillarwellen und auf Wellen angewandt, die sich entlang der gemeinsamen Oberfläche zweier Flüssigkeiten fortpflanzen[176]). Es möge eine Flüssigkeit von der Dichte ϱ' und der Tiefe h' mit gleichförmiger Geschwindigkeit u_0 über eine Flüssigkeit mit der Dichte ϱ und der Tiefe h hinfliessen, während das ganze System zwischen zwei horizontalen Ebenen, die den gegenseitigen Abstand $h + h'$ haben, ein-

---

173) *Stokes* gab das Resultat und die im Text entwickelte Erklärung in einem Smith's Prize Paper, Cambr. Univ. Exam. Papers 1876. Die Sache wurde unabhängig auch von *O. Reynolds,* Nature 16 (1877), p. 343 behandelt.

174) *O. Reynolds* (Fussn. 173).

175) *Stokes,* Papers 1, p. 314.

176) *A. G. Greenhill* (Fussn. 168). Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit von Kapillarwellen wurde zuerst von Sir *W. Thomson,* Phil. Mag. (4) 42 (1871), später unabhängig von *F. Kolaček,* Ann. Phys. Chem. 5 (1878) erhalten, die Dichte der obern Flüssigkeit wurde bei *Kolaček* vernachlässigt. Die Wellen an der gemeinsamen Oberfläche zweier Flüssigkeiten behandelte *Stokes* 1847 (Fussn. 167) unter Vernachlässigung der Oberflächenspannung. Sir *W. Thomson,* l. c. machte die Anwendung auf Wind, der über tiefes Wasser hinbläst. Experimentelle Verifikationen gaben Sir *W. Thomson,* l. c. und auch *L. Matthiessen,* Ann. Phys. Chem. 38 (1889) und *O. Riess* (Fussn. 162).

geschlossen ist. Es ist alsdann die Fortpflanzungsgeschwindigkeit U der Wellen von der Länge $2\pi k^{-1}$ an der gemeinsamen Oberfläche durch die Gleichung

$$gk^{-1}(\varrho - \varrho') + Tk = \varrho U^2 \operatorname{cotgh} kh + \varrho'(U - u_0)^2 \operatorname{cotgh} kh'$$

gegeben, wo T die Oberflächenspannung ist und die Fortpflanzungsrichtung mit derjenigen von u_0 zusammenfällt. Das Resultat kann auf Wellen einer Wasseroberfläche angewandt werden, über die ein Wind hinbläst[176]). *A. G. Greenhill*[168]) hat es auf eine beliebige Anzahl übereinandergelagerter Flüssigkeiten ausgedehnt; es kann auch für heterogene Flüssigkeiten verallgemeinert werden[177]).

Das Problem der stehenden Wellen, die man an der freien Oberfläche von fliessendem Wasser beobachtet, gehört der hier betrachteten Klasse an. Die Unebenheiten an der freien Oberfläche rühren von Unregelmässigkeiten des festen Bodens her, über welche die Flüssigkeit hinströmt. Sir *W. Thomson*[178]) hat die Prinzipien der Energie und Bewegungsgrösse auf das Problem angewandt und war so in der Lage, eine hinreichend allgemeine Lösung zu erhalten, welche die Wirkung irgendwelcher Unregelmässigkeiten des Bodens giebt (vorausgesetzt immer, dass das Niveau des Bodens nahezu konstant ist).

Stehende Wellen können auch von unregelmässigem Druck an der freien Oberfläche herrühren, wie er durch die Anwesenheit irgendwelcher in die Oberfläche eintauchender Hindernisse bedingt ist. Das sich so darbietende Problem ist bis zu einem gewissen Grade unbestimmt, da auf die Wellen, welche von dem Hindernis herrühren, ein beliebiges System freier Wellen aufgelagert werden kann. Lord *Rayleigh*[179]) eliminierte diese freien Wellen, indem er kleine dissipative Kräfte einführte, die der Geschwindigkeit proportional sind. Hierbei bleibt die Bewegung nach wie vor wirbelfrei. Die in Rede stehende Methode wurde insbesondere angewandt, um den Wellenzug zu bestimmen, der ein Schiff begleitet, das in rascher Bewegung durch das Wasser hinfährt[180]). Das Problem der Schiffs-

177) Lord *Rayleigh*, Lond. Math. Soc. Proc. 14 (1883) = Papers 2, p. 200; *W. Burnside*, ibid. 20 (1879), p. 392. *A. E. H. Love*, ibid. 22 (1891), wendet auf das Problem der Wellenbewegung heterogener Flüssigkeiten eine direkte Methode an.

178) Phil. Mag. (5) 22 (1886) und (5) 23 (1887), p. 52. Den Fall einer durch eine Sinuskurve gegebenen Unebenheit des Bodens behandelte *Lamb*, Hydrodynamics p. 407.

179) Lond. Math. Soc. Proc. 15 (1884) = Papers 2, p. 258; vgl. *Lamb*, Hydrodynamics p. 393, 450.

180) *Lamb*, Hydrodynamics p. 403, wo sich auch Verweise auf die Arbeiten

wellen hat *J. H. Michell*[181]) auf anderem Wege, nämlich im Anschlusse an die Untersuchungen von *Poisson*[169]) und *Cauchy*[101]), behandelt. Insbesondere leitete er eine Formel für den Wellenwiderstand ab, die bei wirklichen Schiffsformen anwendbar ist.

5 f. Stehende Oscillationen in Bassins. Eine in einem geraden Kanal von gleichförmigem Querschnitt stattfindende Wellenbewegung, die durch die Gleichung

$$\varphi = A f(y, z) \sin(kx + \sigma t)$$

gegeben ist, führt dazu die harmonische Bewegung einer Flüssigkeit in einem Troge zu bestimmen, der von zwei Normalschnitten $x = 0$ und $x = l$ begrenzt ist, indem man nämlich annimmt, dass $\frac{kl}{\pi}$ eine ganze Zahl ist, und zwei gegeneinander laufende Wellensysteme superponiert. Die in Betracht kommende Bewegung hat das Geschwindigkeitspotential:

$$\varphi = A f(y, z) \cos kx \cos(\sigma t + \varepsilon).$$

Für einen Kanal haben zunächst *P. Kelland*[165]) und *A. G. Greenhill*[168]) den Fall untersucht, dass die Seiten desselben gegen die Vertikale unter einem Winkel von 45° geneigt sind. *H. M. Macdonald*[182]) gab Lösungen für den Fall, dass der Neigungswinkel 60° beträgt. Er behauptet, dass es keine andern Beispiele von Dreiecksquerschnitten giebt, auf welche die in Rede stehende Methode anwendbar ist[182]). *Stokes*[183]) erhielt Lösungen ähnlicher Art für Systeme von Wellen, deren Fortschreitungsrichtung parallel zu dem unter einem Winkel α gegen die Horizontalebene geneigten Ufer sind. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit ist $\sqrt{(gk^{-1} \sin \alpha)}$, wo $2\pi/k$ die Wellenlänge bedeutet.

Für eine inkompressible Flüssigkeit in einem Troge existieren stehende zweidimensionale Oscillationen, bei denen sich die Flüssigkeit in Parallelebenen zu den vertikalen Enden des Troges be-

---

von Sir *W. Thomson* und *R. E.* und *W. Froude* finden, welche die Dinge nach der deskriptiven und beobachtenden Seite hin behandeln.

181) Phil. Mag. (5) 45 (1898).

182) Lond. Math. Soc. Proc. 25 (1894). *Macdonald*'s Ansicht wird von *Lamb*, Hydrodynamics p. 429—436 bestritten. Siehe auch die sich anschliessenden Erklärungen von *Macdonald*, Lond. Math. Soc. Proc. 27 (1896), p. 622. *Stokes*, Report, Papers 1, p. 167 bemerkt, dass Wellen mit geradlinigen Kämmen nicht in allen Kanälen möglich sein können. Er stützt sich hierbei auf Experimente von *J. Scott Russell*, die anzudeuten scheinen, dass solche Wellen unmöglich sind, sobald die Neigung der Seiten einen gewissen Grenzwert überschreitet.

183) Report.

wegt. Diese Oscillationen diskutierte *G. Kirchhoff*[184]) und neuerdings *H. M. Macdonald*[185]). Hat der Trog zwei ebene Seiten mit demselben Neigungswinkel, so scheint die Anwendbarkeit der in Betracht kommenden Methode auf Neigungen (gegen die Horizontale) von 45^0 und 30^0 beschränkt zu sein[186]). Entsprechende Lösungen hat man auch für Wellen gegen ein geneigtes Ufer erhalten, wobei die Neigung gegen die Horizontale π/n ist (n gleich einer ganzen Zahl)[185]).

Für Bassins von anderer Form sind nur erst wenige Probleme der Wellenbewegung gelöst worden[187]). Das wichtigste ist das Problem der Wellenbewegung in kreisförmigen Bassins[188]). Ist a der Radius des Bassins und h die Tiefe, so hat das Geschwindigkeitspotential einer harmonisch schwingenden Flüssigkeit die Form

$$\varphi = A \cosh k(z + h) J_n(kr) \cos(n\vartheta + \alpha) \cos(\sigma t + \varepsilon),$$

wo n eine ganze Zahl und $J_n(kr)$ die *Bessel*'sche Funktion der ersten Art von der Ordnung n ist. k ist durch die Gleichung $J_n'(ka) = 0$ gegeben, σ^2 ist gleich $gk \tanh kh$. Wird die Flüssigkeit in einem irgendwie gestalteten Bassin einer beliebig kleinen anfänglichen Störung unterworfen, so wird man die eintretende Bewegung durch Superposition harmonischer Bewegungen berechnen wollen. *Poincaré*[168]) hat die Reihe der solcherweise für die Entwickelung des Geschwindigkeitspotentials in Betracht kommenden Normalfunktionen näher betrachtet.

5g. **Genauere Bestimmung von Wellenbewegungen.** Die in Nr. 5c—f gegebenen Resultate wurden durch Vernachlässigung der Quadrate und Produkte der Grössen von der Ordnung der Erhebung der freien Oberfläche erhalten. Eine genaue periodische Lösung der *Lagrange*'schen Bewegungsgleichungen für die Wellenbewegung einer Flüssigkeit von unendlicher Tiefe, die unter Einwirkung der Schwere

---

184) Berl. Ber. 1879 = Ges. Abh. p. 428; *Kirchhoff* vergleicht seine Theorie auch mit dem Experimente.

185) Lond. Math. Soc. Proc. 27 (1896), p. 622.

186) *H. M. Macdonald* (Fussn. 185). Im Falle eines Kanals mit kreisförmigen Querschnitt gaben *Lamb*, Hydrodynamics p. 429 und Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 47 (1899), p. 566 eine obere Grenze für die Schwingungszahl der niedrigsten Typen an.

187) *A. G. Greenhill* (Fussn. 168) gab einige Beispiele für Hyperboloide und Kegel.

188) Dieses Problem wurde von *S. D. Poisson*, Gergonne's Ann. 19 (1828) und *M. A. Ostrogradsky*, Paris, Mém. sav. étr. 3 (1832) behandelt. Die vollständige Lösung gab Lord *Rayleigh*, Phil. Mag. (5) 1 (1876) = Papers 1, p. 251.

steht, entdeckte *F. J. v. Gerstner*[189]). Später wurde sie von *W. J. M. Rankine*[190]) neu aufgefunden. Bei dieser Bewegung sind die Koordinaten eines Teilchens, das sich anfänglich in x_0, y_0 befand, zur Zeit t durch die Gleichungen

$$(1) \qquad \begin{cases} x = x_0 + k^{-1} e^{k y_0} \sin k(x_0 + Ut) \\ y = y_0 - k^{-1} e^{k y_0} \cos k(x_0 + Ut) \end{cases}$$

gegeben. Die y-Axe ist dabei vertikal nach oben gezogen. Die Bedingung für die Konstanz des Druckes an einer Fläche $y_0 =$ const. wird $U^2 = gk^{-1}$, sodass die Fortpflanzungsgeschwindigkeit dieser Wellen dieselbe ist, wie die der oscillatorischen Wellen in Nr. 5c. Die durch Gleichung (1) gegebene Bewegung ist übrigens nicht wirbelfrei[191]) und kann daher nicht allein durch Drucke auf die Oberfläche erzeugt werden.

Für wirbelfreie Wellen wollen wir, wenn die auf eine stationäre Bewegung reduzierte Bewegung parallel der Ebene (xy) erfolgt und die y-Axe von der ungestörten Oberfläche aus vertikal nach oben gezogen ist, wie in Nr. 1e, $\varphi + i\psi$ und $x + iy$ mit w bezw. z bezeichnen. Dann sind die beiden Bedingungen zu erfüllen, dass *eine* Stromlinie $\psi =$ const. mit einer gegebenen Kurve in der Ebene zusammenfällt und längs einer andern Stromlinie

$$(2) \qquad gy + \tfrac{1}{2}\left|\frac{dw}{dz}\right|^2 = \text{const.}$$

ist. *Stokes*[192]) hat versucht, diese Bedingungen durch eine Methode fortgesetzter Approximation zu erfüllen, wobei die Resultate in Nr. 5c eine erste Annäherung geben, und er hat gezeigt, wie man bis zur fünften Ordnung kleiner Grössen vorgehen kann. Er fand, dass es eine Grenzform der Welle mit scharfen Kämmen giebt, deren Tangentialebenen unter 120^0 zusammenstossen. Dies Resultat hat *J. H. Michell*[193]) direkt untersucht. *M. P. Rudzki*[194]) zeigte, dass, wenn eine Funktion Z mit z und w durch die Gleichung

$$(3) \qquad \left(A + iB + 3ig\int e^{-iZ} dw\right)^2 \left(\frac{dz}{dw}\right)^3 = e^{-3iZ}\left(A - iB - 3ig\int e^{iZ} dw\right)$$

verbunden ist, wo A und B beliebige reelle Konstante sind, die

189) Prag, Böhm. Abh. 1802; Ann. Phys. (2) 2 (1809).

190) Lond. Phil. Trans. 153 (1863).

191) *Stokes*, Papers 1, p. 219; Lord *Rayleigh* (Fussn. 188).

192) Fussn. 167 und Papers 1, p. 314.

193) Phil. Mag. (5) 36 (1893).

194) Math. Ann. 50 (1898). *W. Voigt,* Gött. Nachr. 1891, p. 46 und 1892, p. 490, wandte *Kirchhoff*'s Methode (Nr. 1f oben) auf kräftefreie Strömungen zwischen zwei gewellten Linien an, von denen die eine eine freie Grenze ist.

Bedingung (2) durch die Bedingung, dass Z für reelles w reell ist, ersetzt werden kann. Insbesondere nahm er $Z = w$ und wurde so zu der Bestimmung der stehenden Wellen auf einem Strom geführt, der über einen unebenen Boden von einer bestimmten Gestalt hinfliesst. Genaue Lösungen, die der Annahme eines festen, ebenen Bodens oder einer unendlichen Tiefe entsprechen würden, hat man bis jetzt nicht gefunden. Die der Gleichung (2) entsprechende Bedingung für zwei übereinandergelagerte Flüssigkeiten formulierte *Helmholtz*[195]), und einige Beispiele diskutierte mit Hülfe einer partikulären konformen Abbildung *W. Wien*[196]).

5h. **Die Einzelwelle.** Bei seinem experimentellen Studium der Wellenbewegung beobachtete *J. Scott Russell*[162]) die Bewegung, welche durch eine plötzliche Erhöhung des Niveaus der Flüssigkeit an einer beliebigen Stelle eines Kanals erzeugt wird. Er fand, dass eine Erhebungswelle von permanentem Typus über die Oberfläche hinfuhr. Diese Welle wird die „Einzelwelle" (solitary wave) genannt. *J. Boussinesq*[197]) versuchte eine angenäherte Theorie dieses Phänomens auf die Annahme zu basieren, dass die Welle einer „langen Welle" insofern ähnelt, als man die gleiche horizontale Geschwindigkeit in allen Punkten eines vertikalen Querschnitts voraussetzen darf. Lord *Rayleigh*[188]) hat die Bewegung auf einen Fall stationärer Bewegung zurückgeführt und eine spezielle Annäherungsmethode benutzt. Beide Autoren fanden für das Wellenprofil eine Gleichung der Form $y = b \operatorname{sech}^2 {}^1\!/_2 kx$ und für die Fortpflanzungsgeschwindigkeit $U = \sqrt{\{g(h+b)\}}$, wo die Konstanten b und k durch die Gleichung $k^2h^3 = 3b$ aneinander gebunden sind; h ist in diesen Gleichungen die Tiefe und b die maximale Erhebung. Die Bahnen der Teilchen sind parabolische Bögen[198]). *J. Mc. Cowan*[199]) zeigte, dass die fortschreitende Bewegung, welche auf eine stationäre Form zurückgeführt der Gleichung

$$\varphi + i\psi = -U\{x + iy - a \operatorname{tangh} {}^1\!/_2 k(x + iy)\}$$

entspricht (in der die Konstanten durch die Beziehungen

$U^2 = gk^{-1} \operatorname{tang} kh$, $ka = {}^2\!/_3 \sin^2 k(h + {}^2\!/_3 b)$, $b = a \operatorname{tang} {}^1\!/_2 k(h + b)$

aneinander geknüpft sind), ebenfalls angenähert eine Einzelwelle mit

---

195) Berl. Ber. 1889, p. 761 = Wiss. Abh. 3, p. 309.

196) Berl. Ber. 1894, p. 509 und 1895, p. 343; Ann. Phys. Chem. 56 (1895), p. 100.

197) J. de math. (2) 17 (1872), p. 55.

198) *J. Boussinesq*, J. d. math. (2) 18 (1873), p. 47.

199) Phil. Mag. (5) 32 (1891).

der maximalen Erhebung b auf einer Flüssigkeit von der Tiefe h repräsentiert. Die Bedingung konstanten Drucks entlang der Stromlinie

$$y = h + a \frac{\sin k(y+h)}{\cos k(y+h) + \cosh kx}$$

ist bis zur zweiten Ordnung in b an allen Stellen und bis zur dritten Ordnung an dem Wellenkamme erfüllt. Dieses Resultat umfasst die Ergebnisse von *J. Boussinesq* und Lord *Rayleigh*. Die hier betrachteten Wellen sind unendlich lang.

Andere Formen langer Wellen wurden von *J. Boussinesq* [197]), *J. Mc. Cowan* [200]) und *R. F. Gwyther* [201]) diskutiert. Einen sehr umfassenden Typus entdeckten *J. Korteweg* und *G. de Vries* [202]): sie fanden, dass bei der Einführung elliptischer Funktionen vom Modul $\sqrt{\{b/(b+c)\}}$ für eine Flüssigkeit von der Tiefe h eine stationäre Bewegung aufgestellt werden kann. Die ausgezeichnete Stromlinie, welche angenähert eine Linie konstanten Druckes ist, hat die Gleichung

$$y = b\left(1 + \mathrm{cn}^2 \frac{x\sqrt{(b+c)}}{2\sqrt{\sigma}}\right),$$

wo $\sigma = \frac{1}{3}h^3$ ist. Die Fortpflanzungsgeschwindigkeit der zugehörigen Wellen ist

$$U = \sqrt{gh}\left\{1 + \frac{b+c}{h} - 2\frac{b+c}{h}\frac{E(K)}{K}\right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Die oben beschriebene Einzelwelle und die langen Wellen von oscillatorischem Typus in Nr. 5c sind Grenzfälle für sehr kleines resp. sehr grosses c.

5i. **Oscillationen einer flüssigen Kugel.** Eine Kugel von homogener, gravitierender Flüssigkeit ist ein in stabilem Gleichgewicht befindliches mechanisches System. Wird das Gleichgewicht ein wenig gestört, so kann die radiale Lagenänderung eines Punktes an der Oberfläche durch eine Reihe von Kugelfunktionen ausgedrückt werden, und jeder in Betracht kommenden Kugelfunktion entspricht dann eine Hauptschwingung. Die Schwingungszahl $\sigma/2\pi$, welche einer harmo-

200) Phil. Mag. (5) 33 (1892); (5) 38 (1894).

201) Phil. Mag. (5) 50 (1900).

202) Phil. Mag. (5) 39 (1895). Die genannten Forscher behandeln auch den allgemeinern Fall, dass eine Oberflächenspannung T in der obern begrenzenden Fläche vorhanden ist. Es ergeben sich dieselben Resultate, nur wird

$$\sigma = \tfrac{1}{3}h^3 - hT/g\varrho.$$

nischen Störung von der Ordnung n entspricht, wird durch die Gleichung[203])

$$\sigma^2 = \frac{2n(n-1)}{2n+1}\,\frac{g}{a}$$

gegeben, wo a der ungestörte Radius und g die Beschleunigung der Schwere an der Oberfläche ist. Umschliesst die Flüssigkeit einen festen Kugelkern vom Radius b, so haben wir

$$\sigma^2 = \frac{n(n+1)\,(a^{2n+1} - b^{2n+1})}{(n+1)\,a^{2n+1} + n b^{2n+1}} \cdot \left(1 - \frac{3}{2n+1}\,\frac{\varrho}{\varrho_0}\right)\frac{g}{a},$$

wo ϱ_0 die mittlere Dichte der Flüssigkeit und des Kernes ist[204]). Für einen kugelförmigen Tropfen, bei dem man die Schwere vernachlässigt, aber die Oberflächenspannung T berücksichtigt, ist die Schwingungszahl der entsprechenden Bewegung durch die Gleichung[205])

$$\sigma^2 = n\,(n-1)\,(n+2)\,\frac{T}{\varrho\, a^3}$$

gegeben.

6. Zähe Flüssigkeiten.

6a. Bewegungsgleichungen. Stationäre Bewegung. Die Bewegungsgleichungen wurden in IV 15, Nr. **13** gegeben. Sie können auch in folgender Form angeschrieben werden[206])

$$(1)\quad \frac{\partial u}{\partial t} + 2\,(w\eta - v\zeta) + \frac{\partial}{\partial x}\,(\tfrac{1}{2}q^2) = X - \frac{1}{\varrho}\,\frac{\partial p}{\partial x} + \frac{4}{3}\,\nu\,\frac{\partial \Theta}{\partial x} - 2\nu\left(\frac{\partial \zeta}{\partial y} - \frac{\partial \eta}{\partial z}\right),$$

wo ν den kinematischen Reibungskoeffizienten bezeichnet. Ist die Flüssigkeit inkompressibel und erfolgt die Bewegung nur in zwei Dimensionen, so erfüllt die Stromfunktion ψ die Gleichung

$$(2)\qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + u\,\frac{\partial}{\partial x} + v\,\frac{\partial}{\partial y} - \nu\Delta_1\right)\Delta_1\psi = 0,$$

wo Δ_1 für $\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ steht[207]). Erfolgt dagegen die Bewegung einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit in Ebenen durch die z-Axe, so genügt die axiale Stromfunktion ψ der Gleichung

---

203) Sir *W. Thomson*, Lond. Phil. Trans. 153 (1863) = Math. and Phys. Papers 3, p. 384.

204) *Lamb*, Hydrodynamics p. 440.

205) Lord *Rayleigh*, Lond. Roy. Soc. Proc. 29 (1879) = Papers 1, p. 377; *R. R. Webb*, Mess. of math. (2) 9 (1880).

206) Vgl. Gleichung (1) in Nr. **3**a oben und Fussn. 96.

207) *Stokes*, Pendulums.

$$(3) \qquad \left(\frac{\partial}{\partial t} + v\frac{\partial}{\partial \varpi} + w\frac{\partial}{\partial z} - \frac{2v}{\varpi} - \nu D\right) D\psi = 0,$$

wo D für $\frac{\partial^2}{\partial \varpi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{1}{\varpi}\frac{\partial}{\partial \varpi}$ steht[207]).

Auch wenn die Kräfte X, Y, Z konservativ sind und die Bewegung stationär ist, entsteht eine besondere Schwierigkeit bei der Behandlung der Gleichungen (1) aus dem Auftreten der Ausdrücke $(w\eta - v\zeta), \ldots$. Erfolgt die Bewegung hinreichend langsam, so können dieselben in erster Annäherung vernachlässigt werden; dann ergeben sich als Bedingungen für die stationäre Bewegung $\Delta\xi = 0$, $\Delta\eta = 0$, $\Delta\zeta = 0$.[208]) Sind diese Gleichungen erfüllt, werden aber die Ausdrücke $(w\eta - v\zeta), \ldots$ nicht vernachlässigt, so ist eine weitere Bedingung für die stationäre Bewegung erforderlich, welche genau so formuliert werden kann, wie die allgemeine Bedingung für die stationäre Bewegung in einer idealen Flüssigkeit (Nr. 3g oben)[209]).

Die Gleichungen der stationären Bewegung können genau erfüllt werden, wenn eine inkompressible zähe Flüssigkeit zwischen zwei coaxialen Cylindern, welche ihrerseits gleichförmig rotieren, eingeschlossen ist. Sind a_0 und a_1 die Radien, ω_0, ω_1 die Winkelgeschwindigkeiten der Cylinder, so ist die stationäre Bewegung durch die Gleichungen[210])

$$(4) \qquad \begin{cases} u = -\omega y, \quad v = \omega x, \quad w = 0, \\ \omega = \dfrac{\omega_0 a_0^2 - \omega_1 a_1^2}{a_0^2 - a_1^2} - \dfrac{a_0^2 a_1^2}{x^2 + y^2}\dfrac{\omega_0 - \omega_1}{a_0^2 - a_1^2} \end{cases}$$

gegeben. Es existiert keine Lösung der Form

$$-\frac{u}{y} = \frac{v}{x} = \omega, \quad w = 0$$

für eine Flüssigkeit, welche zwischen konzentrischen Kugeln eingeschlossen ist, sofern nicht die Bewegung so langsam erfolgt, dass Quadrate und Produkte der Geschwindigkeiten vernachlässigt werden können. ω hat dann die Form $A + B(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$.[207]) Für eine Kugel, welche in einer unbegrenzten Flüssigkeit in gleichförmiger Rotation gehalten wird, hat *A. N. Whitehead*[211]) eine zweite Annäherung zu finden gelehrt. Er bewies, dass die Flüssigkeit längs der Rotationsaxe nach der Kugel hingezogen wird, dass sie aber in

208) *A. Oberbeck,* J. f. Math. 81 (1876).

209) *T. Craig,* Amer. J. of math. 3 (1880).

210) *Stokes,* Friction. Das Problem wurde bereits von *Newton,* Principia, Lib. 2, Prop. 51 behandelt.

211) Quart. J. of math. 23 (1888), p. 78.

der Richtung der Äquatorialebene von ihr fortströmt. *G. Kirchhoff*[212]) betrachtete die langsame Bewegung einer inkompressiblen Flüssigkeit zwischen zwei konfokalen Sphäroiden.

Langsame, stationäre Bewegungen einer zähen, inkompressiblen Flüssigkeit, die sich unter Einwirkung konservativer äusserer Kräfte bewegt, werden im Raume durch die Gleichungen

$$(5) \qquad \begin{cases} \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(V - \frac{p}{\varrho}\right) + \nu \Delta (u, v, w) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

bestimmt. Allgemeine Lösungen dieser Gleichungen in Kugelfunktionen gaben *A. Oberbeck*[208]), *T. Craig*[213]) und *H. Lamb*[214]). Die Lösung für eine Kugel, welche gleichförmig in einer unbegrenzten Flüssigkeit fortschreitet, wurde bereits IV 15, Nr. **15** mitgeteilt. Es existiert keine entsprechende zweidimensionale Lösung für einen Kreiscylinder[207]). Die Bewegung, welche von einem gleichförmig sich bewegenden Ellipsoid herrührt, gab *A. Oberbeck*[208]), während *D. Edwardes*[215]) die Bewegung, welche durch die gleichförmige Rotation eines Ellipsoides bedingt ist, bestimmte. Der letztere hat auch die Bewegung, welche von der Rotation elliptischer und gewisser anderer Cylinder herrührt, untersucht[216]). Langsame Strömungen von axialem Typus an einem Sphäroid vorbei und durch den Raum, der von einem einschaligen Rotationshyperboloid begrenzt wird, hat *R. A. Sampson*[217]) diskutiert. Die speziellen Fälle, in denen ein Strömen an einer Kreisscheibe vorbei und durch eine kreisförmige Öffnung in einer Ebene hindurch stattfindet, hat er im einzelnen weiter behandelt. Die Geschwindigkeit hat hier nicht die Eigenschaft an den scharfen Kanten merkbar zu wachsen. Lord *Rayleigh*[218]) untersuchte einige zweidimensionale Bewegungen, die von Quellen und Senken herrühren, indem er kreisförmige Grenzen voraussetzte. Er kombinierte zu dem Zwecke mögliche Stromfunktionen zweier Arten, nämlich

$$\frac{(1 - r^2) r \sin \vartheta}{1 - 2 r \cos \vartheta + r^2} + 2 \operatorname{arc\,tang} \frac{r \sin \vartheta}{1 - r \cos \vartheta}$$

212) Mechanik p. 376.
213) Phil. Mag. (5) 10 (1880).
214) Lond. Math. Soc. Proc. 13 (1882), p. 51.
215) Quart. J. of math. 26 (1893), p. 70.
216) Quart. J. of math. 26 (1893), p. 157.
217) Lond. Phil. Trans. (A) 182 (1891).
218) Phil. Mag. (5) 36 (1893), p. 354.

und

$$\frac{(1-r^2)^2}{1-2r\cos\vartheta+r^2}.$$

Derselbe Autor diskutierte das Problem der zweidimensionalen Bewegung an einer Ebene vorbei, auf welcher sich kleine Unebenheiten befinden, indem er eine zweite Annäherung gab, die von der Beibehaltung der Quadrate und Produkte der Geschwindigkeiten herrührt[218]).

Die Gleichungen (5) ruhen auf der Voraussetzung, dass die Bewegung in der Hauptsache von der Zähigkeit beherrscht wird. Die praktische Anwendbarkeit unterliegt daher starken Einschränkungen. Z. B. ist bei der stationären Bewegung einer Kugel (IV 15, Nr. **15**) für die Anwendbarkeit der Formeln nötig, dass Ua klein im Vergleich zu ν ist. Immerhin existiert für Flüssigkeiten in dünnen Schichten eine gute Übereinstimmung der Resultate mit den Ergebnissen der Beobachtung. Dies zeigten *H. S. Hele-Shaw*'s Experimente[32]) und *O. Reynolds*' Anwendung der Gleichungen zur Erklärung des grossen Drucks in der dünnen Ölschicht, die als Schmiermittel in einer Maschine dient[219]).

6b. Veränderliche und periodische Bewegungen. Ist die Bewegung langsam, aber nicht stationär, so nimmt man gewöhnlich an, dass u, v, w als Funktionen von t mit $e^{-\nu k^2 t}$ proportional sind, wo k im allgemeinen komplex ist. Ist die Flüssigkeit inkompressibel, so werden die Gleichungen:

$$(1)\qquad \begin{cases} \nu(\Delta + k^2)(u, v, w) + \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right)\left(V - \frac{p}{\varrho}\right) = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \end{cases}$$

In jedem speziellen Problem müssen die Werte von k durch die Grenzbedingungen bestimmt werden, und allgemeinere Lösungen können dann durch Zusammensetzung aus besonderen Lösungen erhalten werden. Ist $\nu k^2 = \tau^{-1} \pm i\sigma$, so ist die Bewegung periodisch mit einer Amplitude, die um den Bruchteil e^{-1} ihrer eigenen Grösse in der Zeit τ abnimmt. Ist also τ gross, so nimmt die oscillatorische Bewegung langsam ab.

Die Mitteilung von Bewegung an eine zähe Flüssigkeit durch eine in ihrer Ebene oscillierende Scheibe wurde von *Stokes*[207]) und

---

219) Lond. Phil. Trans. **177** (1886); vgl. auch *N. Joukowsky*, Petersburg, phys.-chem. Ges. 18 (1886).

O. E. Meyer[220]) betrachtet. Oscilliert die Scheibe so, dass ihre Geschwindigkeit $u_0 \cos \sigma t$ ist, so wird der Widerstand für die Flächeneinheit $\varrho u_0 \sqrt{(\nu\sigma)} \cos\left(\sigma t + \frac{\pi}{4}\right)$. Die Wichtigkeit dieses Resultates liegt in seiner Verwendung bei der experimentellen Untersuchung der Flüssigkeitsreibung[221]). Die oscillatorische Bewegung einer Kugel wurde bereits in IV 15, Nr. **15** erwähnt. Die entsprechende zweidimensionale Lösung für einen Cylinder gab *Stokes*[207]). Für ein in der Richtung seiner Axe oscillierendes Sphäroid fand *J. Buchanan*[222]) die Lösung. Allgemeine Lösungen der Gleichungen (1) in Kugelfunktionen gab in Verbindung mit den Oscillationen einer gravitierenden Kugel *H. Lamb*[214]). Die Zeit τ, in welcher die Amplitude der Oscillation, ausgedrückt durch Kugelfunktionen von der n^{ten} Ordnung, um den Bruchteil e^{-1} ihrer eigenen Grösse abnimmt, ist $\frac{a^2}{(n-1)(2n+1)\nu}$.[214]) Die Gleichungen (1) wurden ferner von *Stokes*[207]) verwendet, um die Wirkungen der Zähigkeit auf Flüssigkeitswellen im Falle unendlicher Tiefe zu bestimmen. Das Resultat für kleines ν wurde in IV 15, Nr. **15** gegeben; wenn ν gross ist, nähert sich die Flüssigkeit, ohne zu oscillieren, asymptotisch der Gleichgewichtslage[223]). Die hierbei gebrauchten Methoden führen des ferneren dahin, eine Erklärung für die beruhigende Wirkung, die Öl auf Wellen hat[224]), und für die durch Wind erzeugte Wellenbewegung zu geben. Im letzteren Falle ist die Theorie in Übereinstimmung mit der Beobachtung von *J. Scott Russell*[162]), dass Wind, der über die Oberfläche von stillem Wasser mit einer Geschwindigkeit < 23 cm/sec hinbläst, keine Wellen von permanentem Typus erzeugt[225]). Die Theorie von der Abnahme der Wellenbewegung durch innere Reibung haben *A. B. Basset*[226]) und *S. S. Hough*[227]) auf eine Flüssigkeit von endlicher Tiefe ausgedehnt. Der letztere benutzte das Resultat, dass im allgemeinen Wellenbewegungen und andere langsame Bewegungen im tiefen Wasser sehr allmählich abnehmen, zur Erklärung gewisser Phänomene, die sich bei Ozeanströmungen darbieten.

---

220) J. f. Math. 59 (1861) und 62 (1863).

221) Vgl. IV 15, Nr. **17**, Fussn. 102.

222) Lond. Math. Soc. Proc. 22 (1891).

223) *Lamb*, Hydrodynamics p. 548.

224) *O. Reynolds*, Brit. Assn. Rep. 1880; *Lamb*, Hydrodynamics p. 552.

225) Sir *W. Thomson*, Fussn. 176; *Lamb*, Hydrodynamics p. 549.

226) Hydrodynamics 2, p. 313, auch Amer. J. of math. 16 (1894), wo sich ein allgemeiner Bericht über die Theorie der Wellen in zähen Flüssigkeiten befindet.

227) Lond. Math. Soc. Proc. 28 (1897).

Gewisse langsame, veränderliche Bewegungen einer Flüssigkeit, bei denen u, v, w nicht mit $e^{-\nu k^2 t}$ proportional sind, können dadurch bestimmt werden, dass man $V - \varrho^{-1} p$ konstant wählt und Methoden benutzt, die zunächst in Verbindung mit der Theorie der Wärmeleitung entwickelt worden sind[207]). Bei Laminarbewegung in einem Raume mit ebenen Grenzen $y = \text{const.}$ ist die Geschwindigkeit in der That durch die Gleichung

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}$$

gegeben. Diese Gleichung führt zur Bestimmung der Bewegung auf der einen Seite einer unendlich ausgedehnten Ebene, die in einer gewissen Weise in Bewegung gehalten wird[207]). Eine andere Anwendung wurde von Lord *Rayleigh*[228]) bei seinem Beweis der Labilität der diskontinuierlichen Bewegungen gemacht. Nehmen wir an, dass anfänglich $u = \mp u_0$ ist, je nachdem y positiv oder negativ ist, so wird, wenn die Flüssigkeit unbegrenzt ist, nach der Zeit t

$$u = \frac{2 u_0}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2} y (\nu t)^{-\frac{1}{2}}} e^{-\vartheta^2} d\vartheta$$

sein. Entsprechende Probleme für die Bewegung zwischen Cylindern mit derselben Axe (der z-Axe) wurden, wenn die Geschwindigkeit w eine Funktion des Abstandes von der Axe ist, von *H. Stearn*[229]) behandelt. *A. B. Basset*[230]) untersuchte die Bewegung, welche von einer Kugel herrührt, die sich unter Einwirkung konstanter äusserer Kräfte in gerader Linie fortbewegt, sowie auch die Bewegung, welche von einer Kugel herrührt, die um einen festen Durchmesser unter Ausschluss äusserer Kräfte rotiert.

Ist die Flüssigkeitsbewegung weder langsam noch stationär, fallen aber die Stromlinien mit den Wirbellinien zusammen, oder sind die Grössen $2(w\eta - v\zeta), \ldots$ aus einem Potential Ω ableitbar, so können die allgemeinen Gleichungen (1) in Nr. 6a auf die Form

$$\begin{cases} \nu(\Delta + k^2)(u, v, w) + \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z}\right) W = 0, \\ \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0 \end{cases}$$

zurückgeführt werden. Hier nimmt man die u, v, w mit $e^{-\nu k^2 t}$

228) Lond. Math. Soc. Proc. 11 (1880), p. 57 = Papers 1, p. 474.

229) Quart. J. of math. 17 (1881). Die veränderliche Rotation bei coaxialen cylindrischen Begrenzungsflächen wurde ferner von *J. H. Röhrs*, Lond. Math. Soc. Proc. 5 (1874) und *M. Margules*, Wien. Ber. 83 (1881), 85 (1882) behandelt.

230) Lond. Phil. Trans. (A) 179 (1888).

proportional an und betrachtet die Flüssigkeit als inkompressibel; ferner setzt man im zweiten Falle

$$W = V - \varrho^{-1} p - \frac{1}{2} q^2 - \Omega;$$

im ersten Falle lässt man Ω in der Gleichung weg. In beiden Fällen existiert eine Druckgleichung, die durch $\Delta W = 0$ bestimmt wird[231]). Die Form der Druckgleichung für den allgemeinen Fall betrachtete *J. Brill*[232]), indem er dabei die Transformation (4) von Nr. 3a oben benutzte.

---

231) *W. Steklow*, Charkow Ges. 5 (1895); *N. Schiff*, Mosk. Phys. Sect. 9 (1897). Vgl. *J. Brill*, Mess. of math. (2) 27 (1898), wo die Bedingungen dafür entwickelt sind, dass die Wirbelfäden stets von denselben Teilchen gebildet werden.

232) Lond. Math. Soc. Proc. 26 (1897).

(Abgeschlossen im Mai 1901.)

UNIVERSITY OF MAINE
3 7550 01697301 9

S0-GBG-997